2016年日本ジュニア数学オリンピック予選

(公財) 数学オリンピック財団

問　題[1]

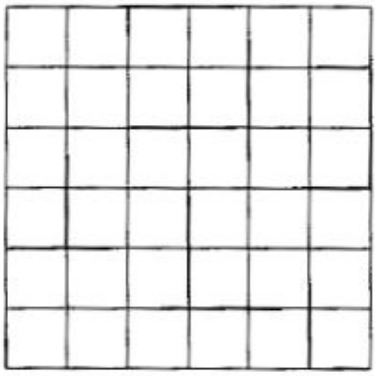
2016年1月11日 試験時間3時間12題 (答のみを記入する)

1. 1以上5以下の整数の組 (a, b, c) であって, $a \times b$ と $b \times c$ がともに偶数であるものはいくつあるか.

2. 平面上に長さ10の線分 AB があり, 2点 P, Q が $\angle APB = 60^\circ$, $\angle AQB = 120^\circ$ をみたしながらこの平面上を動く. このとき線分 PQ の長さとしてありうる最大の値を求めよ.

3. 6×6 のマス目があり, このうち6つのマスを選んで黒く塗(ぬ)る. マス目と同じ大きさの透(とう)明な板を何枚か用意し, 得られたマス目を書き写す. それぞれの板に回転や裏返しを施(ほどこ)して, 同じ大きさの正方形の上にはみ出さないように重ねて置いたところ, 正方形全体を黒く塗った部分で覆(おお)うことができた. このとき, はじめのマス目の塗り方は何通りあるか.

ただし, 回転や裏返しで重なるものも異なるものとして数える.



4. りんごとみかんが2016個ずつあり, これらを次の条件の下で2016人に配った:

- すべての果物を配らなければならない.
- 果物を1個ももらわない人がいてもよい.
- どの人も2種類合わせて4個までしかもらうことができない.

このとき, りんごをみかんより1個以上多くもらった人は最大で何人存在するか.

5. 三角形 ABC の辺 BC 上に点 D, E があり, B, D, E, C はこの順に並んでいる. $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC = 45^\circ$ であるとし, 三角形 ABE の外接円と直線 AC との交点のうち, A でない方を F とする. $AC = 3$, $AD = 1$ のとき, 線分 DF の長さを求めよ.
ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

6. 正の整数 m, n は

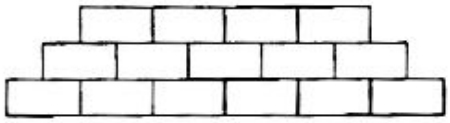
$$m(m+2) = n(n+57)$$

をみたす. このとき, n としてありうる最大の値を求めよ.

7. 円に内接する四角形 $ABCD$ があり, $AC = 28$ である. 線分 BD の中点 M は, $\angle AMB = \angle CMB$, $AM = 20$, $CM = 16$ をみたしている. このとき, $BA : BC$ を求めよ.
ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

8. 各桁の数字が相異なるような 37 の倍数のうち, 最大のものを求めよ.

9. 15 個の長方形が下図のように並んでいる.

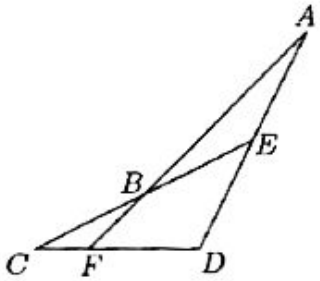


これらの長方形のそれぞれを赤か青のいずれかの色で塗り, 次の条件をみたすようにする:

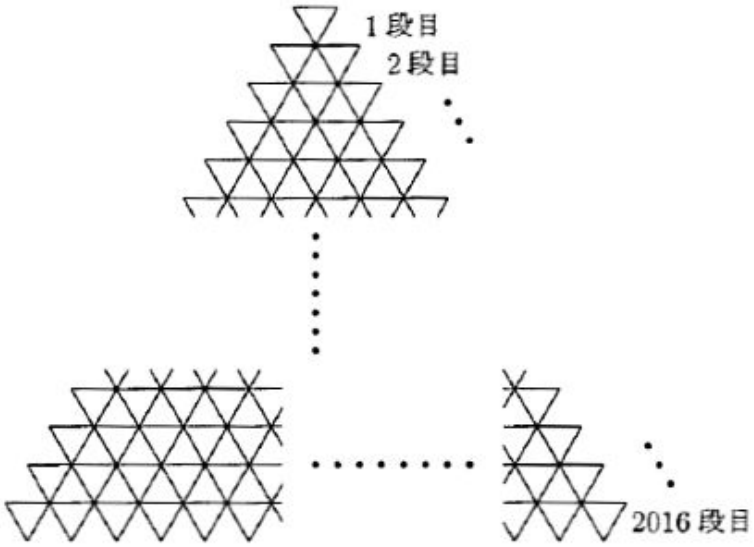
> 最下段以外の長方形を赤で塗るとき, その長方形のすぐ下にある 2 つの長方形も赤で塗る.

このような塗り方は何通りあるか.

10. 頂点 B における内角が 180° よりも大きい四角形 $ABCD$ があり, $AB : CD = \sqrt{2} : 1$, $AD = 2$, $BC = 1$ が成り立っている. 直線 BC と辺 AD の交点を E, 直線 AB と辺 CD の交点を F とおくと, $\angle CED = \angle AFD = 45^\circ$ が成立した. このとき, 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ.
ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.



11. 下図のように k 段目には k 個の下向きの正三角形が並んでいるものを 2016 段重ねた図形を考える．最も上の辺の中点から始めて下向きの正三角形の辺上すべてをちょうど 1 回ずつ通るように一筆書きしたところ，途中で T 回曲がった．T としてありうる最小の値を求めよ．



12. xy 座標平面上のすべての格子点 (x, y) から $(x+1, y)$ または $(x, y+1)$ のちょうど一方に矢印を引く．いま，2016 人の人を $x, y \geqq 0$, $x+y \leqq 62$ をみたす格子点に 1 人ずつ配置することを考える．ある矢印の引き方に対して，異なる配置を N 通り試したところ次の条件が成り立った．

> 条件：どの人についても，配置された格子点から引かれている矢印の先には N 通りすべてで同じ人が配置されているか，N 通りすべてで誰も配置されていないかのいずれかである．

N としてありうる最大の値を求めよ．

ただし，格子点とは x 座標と y 座標がともに整数であるような点である．

以上

3／3

第14回日本ジュニア数学オリンピック予選

解答用紙

受験番号					
氏名					

1	2	3
62個	$\frac{20\sqrt{3}}{3}$	32768通り

4	5	6
1612人	$\frac{5}{4}$	783

7	8	9
$\sqrt{5}:2$	9876435012	365通り

10	11	12
$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$	7559	32!16!8!4!2!1!

合計点

受験番号					