

1 [2021 群馬大]

図1のように、水平面に対して傾きが θ

$(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ [rad]})$ の斜面をもつ台が水平な床に固定さ

れている。斜面上に2点P, Qがあり, 2点間の距離は L である。重力加速度の大きさを g として次の問いに答えよ。

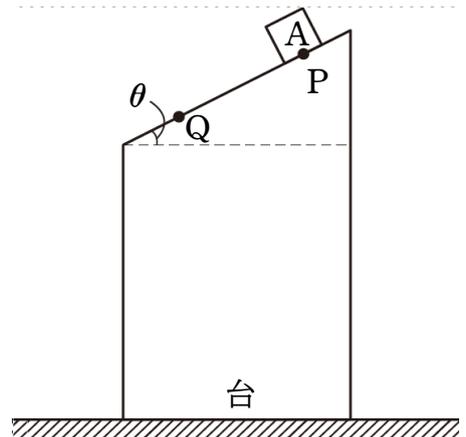


図1

[A] 図1のように, 大きさの無視できる質量 M_A の小物体Aを斜面上の点Pに置き, 静かにはなしたところ, 小物体Aは点Pから初速度の大きさ0で斜面にそってすべり落ち, 点Qに到達した。斜面と小物体Aの間の摩擦はないものとする。

- (1) 小物体Aが斜面をすべり落ちている間の, 小物体Aの加速度の大きさを g, θ を用いて表せ。
- (2) 小物体Aが点Pから点Qまで移動する間にかかった時間 t_1 を g, θ, L を用いて表せ。
- (3) 小物体Aが点Qに到達したときの小物体Aの速度の大きさを g, θ, L を用いて表せ。

[B] 次に, 図2のように, 図1の台の斜面の両端にそれぞれ滑車を配置し, 3つの小物体を伸び縮みしない糸で接続する。質量 M_B の小物体Bに接続された糸は, 左側の滑車を通して, 斜面上にある質量 M_A の小物体Aに接続されている。一方, 質量 M_C の小物体Cに接続された糸は, 右側の滑車を通して, 小物体Aに接続されている。最初, 小物体Aは点Pに固定されている。小物体Aの固定を静かに外すと, 小物体Aは点Pから初速度の大きさ0で斜面にそってすべり落ち, 点Qに到達した。その際, 小物体BとCは, 床や滑車に接触することなく移動した。また, 2本の糸はたるまず, 小物体Aと滑車の間では常に斜面に平行であった。

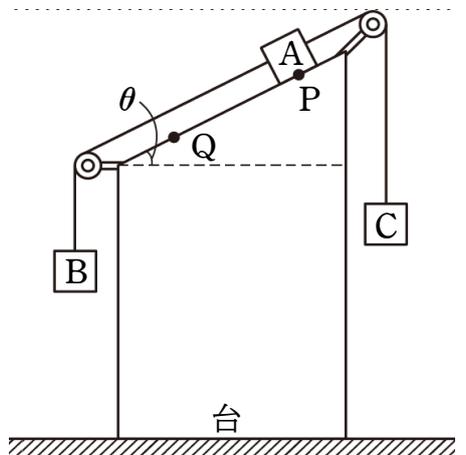


図2

それぞれの小物体の大きさ, および斜面と小物体Aの間の摩擦はないものとする。また, 糸と滑車の質量および糸と滑車の間の摩擦もないものとする。

- (4) 小物体Aが斜面上のPQ間をすべり落ちている間の, 小物体Aの加速度の大きさを M_A, M_B, M_C, g, θ を用いて表せ。
- (5) 小物体Aが斜面をすべり落ちるためには小物体Cの質量 M_C は, $M_C < \boxed{\text{ア}}$ を満たす必要がある。(ア)に入る最も適切な数式を M_A, M_B, θ を用いて表せ。
- (6) 小物体Aが点Pから動きだし, 点Qに到達するまでの間に, 小物体Aにはたら

く力の合力がした仕事の大きさを M_A , M_B , M_C , g , θ , L を用いて表せ。

(7) 小物体 A が点 P から点 Q まで移動する間にかかった時間 t_2 を M_A , M_B , M_C , g , θ , L を用いて表せ。

(8) (2) と (7) で求めた t_1 と t_2 を比較する。 $t_2 < t_1$ となるためには小物体 C の質量 M_C は、 $M_C < \boxed{\text{イ}}$ を満たす必要がある。(イ)に入る最も適切な数式を M_B , θ を用いて表せ。

2 [2020 千葉大]

図1のように、質量 M 、長さ L の一様で細くかたい棒 AB を、なめらかで鉛直な壁とあらかく水平な床との間に立てかけたところ、棒は静止した。棒は壁に垂直な鉛直面内にあるものとし、床と棒のなす角を θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) とする。棒と床との間の静止摩擦係数を μ 、重力加速度の大きさを g として、次の問いに答えよ。

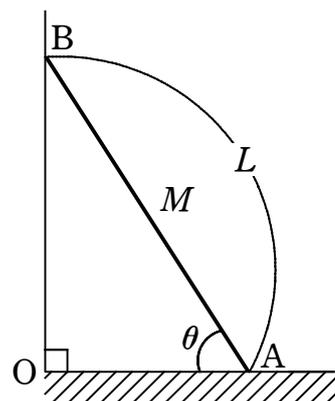


図1

- (1) 棒が床から受ける垂直抗力と摩擦力の大きさをそれぞれ求めよ。
- (2) この角度 θ で棒が静止したことからわかる静止摩擦係数 μ の大きさの範囲を不等式で表せ。

次に、図2のように、棒の上端 B から距離 x だけ離れた位置で、細くて軽い糸で質量 m のおもりを棒につるした。このとき棒は静止したままであった。

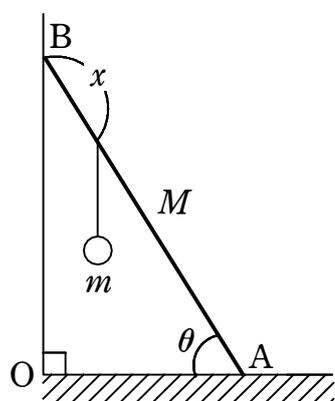


図2

- (3) 棒が床から受ける垂直抗力と摩擦力の大きさをそれぞれ求めよ。
- (4) この角度 θ で棒が静止したことからわかる静止摩擦係数 μ の大きさの範囲を不等式で表せ。

1 [2021 群馬大]

- [A] (1) 求める加速度の大きさを a とする。A について
斜面にそった方向の運動方程式を立てて (図 a)

$$M_A a = M_A g \sin \theta$$

よって $a = g \sin \theta$

- (2) 等加速度直線運動の式 「 $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ 」 より

$$L = 0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot g \sin \theta \cdot t_1^2$$

よって $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}}$

- (3) 求める速度の大きさを v とする。等加速度直線運動の式 「 $v = v_0 + at$ 」 より

$$v = 0 + g \sin \theta \cdot t_1 = g \sin \theta \cdot \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}}$$

よって $v = \sqrt{2gL \sin \theta}$

- 別解 等加速度直線運動の式 「 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ 」 より

$$v^2 - 0^2 = 2 \cdot g \sin \theta \cdot L$$

よって $v = \sqrt{2gL \sin \theta}$

- [B](4) B に接続された糸にはたらく力の大きさを T_1 , C
に接続された糸にはたらく力の大きさを T_2 とする。
また A, B, C の加速度を a' とし, 小物体それぞれ
が運動する向きを正の向きとして運動方程式を立て
ると

$$A : M_A a' = T_1 + M_A g \sin \theta - T_2$$

$$B : M_B a' = M_B g - T_1$$

$$C : M_C a' = T_2 - M_C g$$

3 式の辺々足しあわせて, T_1, T_2 を消去して

$$(M_A + M_B + M_C) a' = (M_A \sin \theta + M_B - M_C) g$$

よって $a' = \frac{M_A \sin \theta + M_B - M_C}{M_A + M_B + M_C} g$

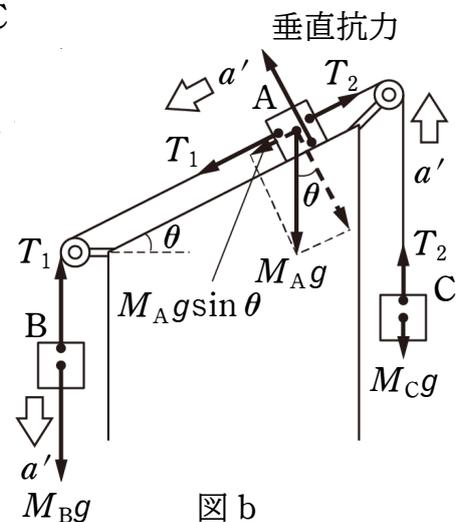
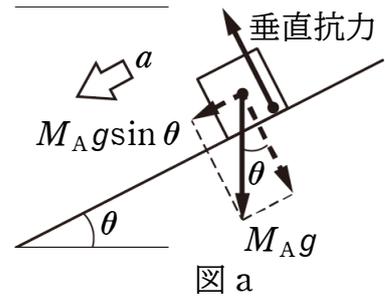
- (5) A が斜面をすべり落ちるためには $a' > 0$ となる必要があるので, (4) の結果より

$$\frac{M_A \sin \theta + M_B - M_C}{M_A + M_B + M_C} g > 0$$

よって $M_C < M_A \sin \theta + M_B$

- (6) 求める仕事を W , A にはたらく力の合力の大きさを F_A とする。斜面にそって下
向きを正の向きとすると

$$F_A = T_1 + M_A g \sin \theta - T_2 = M_A a'$$



$$= M_A \cdot \frac{M_A \sin \theta + M_B - M_C}{M_A + M_B + M_C} g$$

仕事の定義式「 $W = Fx$ 」より

$$W = F_A \cdot L = \frac{M_A \sin \theta + M_B - M_C}{M_A + M_B + M_C} M_A g L$$

(7) 等加速度直線運動の式「 $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ 」より

$$L = 0 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_A \sin \theta + M_B - M_C}{M_A + M_B + M_C} g \cdot t_2^2$$

$$\text{よって } t_2 = \sqrt{\frac{2L}{g} \cdot \frac{M_A + M_B + M_C}{M_A \sin \theta + M_B - M_C}}$$

(8) $t_2 < t_1$ より

$$\sqrt{\frac{2L}{g} \cdot \frac{M_A + M_B + M_C}{M_A \sin \theta + M_B - M_C}} < \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}}$$

$$\sqrt{\frac{M_A + M_B + M_C}{M_A \sin \theta + M_B - M_C}} < \sqrt{\frac{1}{\sin \theta}}$$

$$(M_A + M_B + M_C) \sin \theta < M_A \sin \theta + M_B - M_C$$

$$(M_B + M_C) \sin \theta < M_B - M_C$$

$$\text{整理して } M_C < \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} M_B$$

2 [2020 千葉大]

(1) 棒が床から受ける垂直抗力の大きさを N_A , 静止摩擦力の大きさを f_A , 壁から受ける垂直抗力の大きさを N_B とする。棒にはたらく力を図示すると図 a のようになる。鉛直方向における棒にはたらく力のつりあいは

$$N_A - Mg = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

水平方向における棒にはたらく力のつりあいは

$$N_B - f_A = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

また点 A のまわりの力のモーメントのつりあいについて力のモーメントの式「 $M = Fl$ 」より

$$Mg \cos \theta \times \frac{L}{2} - N_B \sin \theta \times L = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ 式より } N_A = Mg$$

$$\textcircled{3} \text{ 式より } N_B = \frac{Mg \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{Mg}{2 \tan \theta}$$

$$\textcircled{2} \text{ 式より } f_A = N_B = \frac{Mg}{2 \tan \theta}$$

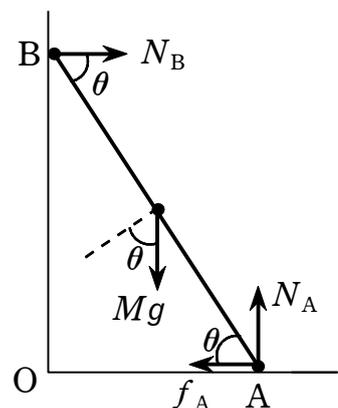


図 a

(2) 棒が静止するためには、 f_A が最大摩擦力 μN_A 以下であればよいので

$$f_A \leq \mu N_A$$

$$\frac{Mg}{2 \tan \theta} \leq \mu Mg$$

よって $\mu \geq \frac{1}{2 \tan \theta}$

(3) 棒が床から受ける垂直抗力の大きさを N_A' 、静止摩擦力の大きさを f_A' 、壁から受ける垂直抗力の大きさを N_B' とする。棒にはたらく力を図示すると図 b のようになる。

鉛直方向における棒にはたらく力のつりあいは

$$N_A' - Mg - mg = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

水平方向における棒にはたらく力のつりあいは

$$N_B' - f_A' = 0 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

また点 A のまわりの力のモーメントのつりあいについて力のモーメントの式「 $M = Fl$ 」より

$$Mg \cos \theta \times \frac{L}{2} + mg \cos \theta \times (L - x) - N_B' \sin \theta \times L = 0 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

④ 式より $N_A' = (M + m)g$

⑥ 式より
$$N_B' = \frac{ML + 2m(L - x)}{2L \sin \theta} g \cos \theta$$

$$= \frac{ML + 2m(L - x)}{2L \tan \theta} g$$

⑤ 式より $f_A' = N_B' = \frac{ML + 2m(L - x)}{2L \tan \theta} g$

(4) 棒が静止するための条件は、(2) と同様に

$$f_A' \leq \mu N_A'$$

$$\frac{ML + 2m(L - x)}{2L \tan \theta} g \leq \mu (M + m)g$$

よって $\mu \geq \frac{ML + 2m(L - x)}{2(M + m)L \tan \theta}$

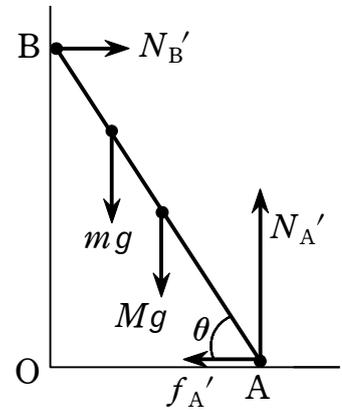


図 b