多重ベータ関数について

神戸高校数学研究会

町田　宇弥

多重ガンマ関数は以下のように定義される.

$$\Gamma_r(w|\underline{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,w,\underline{\omega})\Big|_{s=0}\right)$$

ここで

$$\zeta_r(s,w,\underline{\omega}) = \sum_{n_1,n_2,\cdots,n_r\geq 0}(n_1\omega_1+n_2\omega_2+\cdots+n_r\omega_r+w)^{-s}$$

また, $\underline{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_r)\quad(\omega_i>0)$

このようにして定義された多重ガンマ関数は周期性

$$\Gamma_r(w+\omega_i|\underline{\omega}) = \Gamma_r(w|\underline{\omega})\Gamma_{r-1}(w|\underline{\omega}\langle i\rangle)^{-1}$$ や,

$$\Gamma_r(Nw|\underline{\omega}) = \prod_{k_1,\cdots,k_r=0,\cdots N-1}\Gamma_r\left(w+\frac{k_1\omega_1+k_2\omega_2+\cdots k_r\omega_r}{N}\Big|\underline{\omega}\right)$$

などの関数等式を持つ性質の良い関数である. そこで私は別の関数を多重化してみようと思い研究に至った.

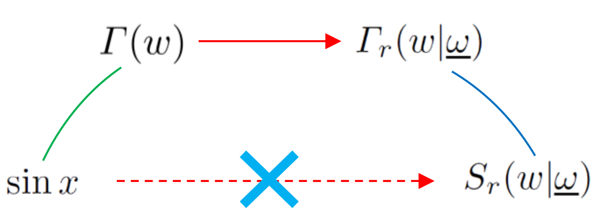
先人たちが三角関数を多重化するときどうしたか, というのを考えてみることにした.
三角関数にはガンマ関数との非常に興味深い関係がある. それは以下の式である.

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}$$

この式から, 多重三角関数を次のように導入するのである;

$$S_r(z|\underline{\omega}) = \Gamma_r(z|\underline{\omega})^{-1}\ \Gamma_r(\omega_1+\cdots+\omega_r-z|\underline{\omega})^{(-1)^r}$$

すなわち, 三角関数の定義やマクローリン展開などから多重化を構成するのではなく, ガンマ関数を経由して多重化するのである.
このことを図式化すると次のようになる.



このことは, よく考えるとガンマ関数の多重化にも使われている. というのも, ガンマ関数の多重化もLerchの公式を用いてゼータ関数を経由することによって多重化しているからである.
したがって, ガンマ関数との関係式をもつベータ関数もこの手法により多重化できるのではないか, と私は考えたのである.

ベータ関数は以下のように定義される.

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (x,y>0)$$

ここで, この関数を多重化するのに次の関係式を使う;

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

この式のガンマ関数のところを多重ガンマ関数とすることで多重ベータ関数を定義するのである.

$$B_r(x,y|\underline{\omega}) = \Gamma_r(x|\underline{\omega})\Gamma_r(y|\underline{\omega})\Gamma_r(x+y|\underline{\omega})^{-1} \qquad (x,y>0)$$

このように定義すると, 通常積分を通して得られる公式などが, 多重ガンマ関数から得ることができる.また, 通常のベータ関数で成り立つ関数等式の多重化バージョンを考えることができる.紙面の都合上, 証明は省くがすべて多重ガンマ関数の性質を応用することにより得られるものばかりである.

i.　対称性(1)

$$B_r(x,y|\underline{\omega}) = B_r(y,x|\underline{\omega})$$

ii.　対称性(2)

$$\Gamma_{r-1}(x|\underline{\omega}\langle i\rangle)B_r(x+\omega_i,y|\underline{\omega}) = \Gamma_{r-1}(y|\underline{\omega}\langle i\rangle)B_r(x,y+\omega_i|\underline{\omega})$$

iii.　周期性

$$B_r(x+\omega_i,y|\underline{\omega}) + B_r(x,y+\omega_i|\underline{\omega})$$
$$= B_r(x,y|\underline{\omega})\{\Gamma_{r-1}(w|\underline{\omega}\langle i\rangle)+\Gamma_{r-1}(w|\underline{\omega}\langle i\rangle)\}$$

iv.　周期性(2)

$$B_r(x+\omega_i,y+\omega_j|\underline{\omega}) = B_r(x,y|\underline{\omega})B_{r-1}(x,y|\underline{\omega}\langle i\rangle)^{-1}$$
$$B_{r-1}(x,y|\underline{\omega}\langle j\rangle)^{-1}B_{r-2}(x,y|\underline{\omega}\langle i,j\rangle)\Gamma_{r-1}(x|\underline{\omega}\langle j\rangle)$$
$$\Gamma_{r-1}(y|\underline{\omega}\langle i\rangle)\Gamma_{r-2}(x|\underline{\omega}\langle i,j\rangle)\Gamma_{r-2}(y|\underline{\omega}\langle i,j\rangle)$$

v.　関数等式(1)

$$B_r(x,y|\underline{\omega}) = B_r(x+\omega_i,y|\underline{\omega})B_{r-1}(x,y|\underline{\omega}\langle i\rangle)\Gamma_{r-1}(y|\underline{\omega}\langle i\rangle)^{-1}$$

vi.　関数等式(2)

$$\left(\frac{B_r(x+\omega_i,y|\underline{\omega})+B_r(x,y+\omega_i|\underline{\omega})}{\Gamma_{r-1}(x|\underline{\omega}\langle i\rangle)+\Gamma_{r-1}(y|\underline{\omega}\langle i\rangle)}\right)^2 = \frac{B_r(x+\omega_i,y|\underline{\omega})B_r(x,y+\omega_i|\underline{\omega})}{\Gamma_{r-1}(x|\underline{\omega}\langle i\rangle)\Gamma_{r-1}(y|\underline{\omega}\langle i\rangle)}$$

vii.　積分表示

$$B_r(x,y|\underline{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt\right)^{-1}\left(\int_0^\infty\frac{(e^{-x}+e^{-y}+e^{-x-y})}{\prod_{k=1}^r(1-e^{-\omega_k t})}t^{s-1}dt\right)\right\}\Bigg|_{s=0}\right)$$

このように, 対称性や周期性も兼ね備えてはいるが, N倍角公式などの性質は持たない. そのような性質を持たせるように多重化することも考えてみたい.