

1を聞いてeを知る

兵庫県立神戸高等学校

平野浩太郎 福田大智 松川健人 山内悠理子

1. 動機

ご飯を食べるために商店街でお店探しをしていると決めきることができず、引き返すことになってしまった。そこで、商店街を引き返さずに自分たちにとって一番いい店に入れる確率が高くなるような方法がないか考えた。

2. ルール

この問題を解決するため以下の条件と、お店探しの方法を定めた。
・店舗数は n 軒 ($n \in \mathbb{N}$)
・各店には満足度と呼ばれる 0 より大きい互いに異なる実数が定められており、 h 軒目の満足度を a_h とおく。
・一番いい店を最も満足度の値が大きい店とする。
・店にたどり着くたびにその店に入るか入らないかをその場で決断しなければならない。
・一度入らないと決めた店には二度と戻ることはできない。
・入店を決めたらその時点で店選びは終了する。

(店選びの方法 (ルール))

K 軒目 ($1 \leq k < n$) までを無条件に入店せず、 $k+1$ 軒目以降で「今までで最も満足度が大きい (a_h が最も大きい) 店」に入店する。 $n-1$ 軒目も入店しなかった場合は n 軒目に必ず入店する。

3. 解法

t 番目に1番いいお店がある確率は $\frac{1}{n}$ 。

このとき t 番目の店を選ぶ確率は

i) $t \leq k$ のとき $\dots 0$

ii) $t > k$ のとき $\dots \frac{k}{t-1}$ 。

よって1番いい店を選ぶ確率 P は

$$P = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{k}{\ell-1} = \frac{k}{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

これを最大にする k を求めればよい。

n が十分に大きいとき、調和級数より

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx \log n \quad (\text{調和級数})$$

$$P = \frac{k}{n} \sum_{\ell=k+1}^n \frac{1}{\ell-1} \approx \frac{k}{n} \log \frac{n}{k}$$

P を k で微分して

$$\frac{d}{dk} P = \frac{1}{n} \log \frac{n}{k} - \frac{1}{n}.$$

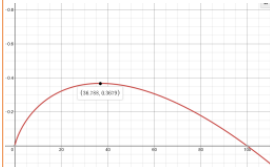
よって P を最大にする $\frac{n}{k}$ は

$$\frac{n}{k} = e$$

つまり $k = \frac{n}{e}$ のとき P は最大となりその確率は

$$P = \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e} \approx 37\%$$

となる。



P のグラフ ($n=100$)

4. 結論(1)

最初から全体の37%までの店を無条件に入店せず、それ以降で一番いい店があればそこに入店する。このとき入店した店が全体の中で最も良い店である確率は約37%である。これはランダムにお店を選ぶよりも高い確率である。(n が大きい場合)

5. 現実近づける

3 では人が歩く、つまり疲れるということも考慮していない。より現実的なモデルに近づけるためにはこのことを考慮しなくてはならない。
ここで、2 の満足度の定義に加えて歩行距離に対応する疲労係数 f ($0 < f < 1$) が存在し、 h 軒目の満足度 a_h が歩行による疲労度により $f^{h-1} a_h$ になるとする。 $b_h = f^{h-1} a_h$ とおく。そして、ルールを設ける。

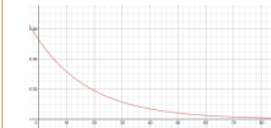
(ルール) ℓ 軒目 ($1 \leq \ell < n$) までを無条件に入店せず、 $\ell+1$ 軒目以降で「今までで最も満足度が大きい (b_h が最も大きい) 店」に入店する。 $n-1$ 軒目も入店しなかった場合は n 軒目に必ず入店する。(2 と同様)

6. 解法

a_h が $a_1 \sim a_n$ の中で最も大きい確率は k によらず $\frac{1}{n}$ なので b_h が $b_1 \sim b_n$ の中で最も大きい確率は比は $1:f^2:\dots:f^{n-2}:f^{n-1}$ とする。
よって b_h が $b_1 \sim b_n$ の中で最も大きい確率は

$$f(h) = \frac{(1-f)f^{h-1}}{1-f^n}$$

と定義する。



$y=f(h)$ のグラフ
 $n=100, f=0.95$ とした。
後ろの方の店に行くにつれ、確率が低下してゆく。

t 番目に1番いいお店があるとする。ここで t 番目の店を選ぶ確率は

1) $t \leq \ell$ のとき $\dots 0$

2) $t > \ell$ のとき

$$g(t) = \frac{\sum_{i=1}^t f(i)}{\sum_{i=1}^{t-1} f(i)} = \frac{1-f^t}{1-f^{t-1}}$$

と表せる。

よって1番いい店に入れる確率は

$$P(\ell) = \sum_{t=\ell+1}^n f(t)g(t) = \frac{(1-f)(1-f^\ell)}{1-f^n} \int_{\ell+1}^{n+1} \frac{f^t-1}{1-f^{t-1}} dt \quad (\text{積分で近似})$$

$$\therefore P(\ell) = \frac{(1-f)(1-f^\ell)}{(1-f^n) \log f} \log \frac{1-f^\ell}{1-f^n}$$

となる。

$$\frac{d}{d\ell} P(\ell) = \frac{(f-1)f^\ell}{1-f^n} \left\{ \log \left(\frac{1-f^\ell}{1-f^n} \right) + 1 \right\}$$

なので、 $P(\ell)$ を最大にする ℓ は

$$\ell = \log_f \left\{ 1 - \frac{1}{e} (1-f^n) \right\}$$

で、このとき $P(\ell)$ は

$$P(\ell) = \frac{f-1}{e \log f}$$

となる。



$y=P(l)$ のグラフ
 $n=100, f=0.99$ とした。

2

6. 考察

まず、 n が無限大の時を考えると

f に n が無関係な定数として、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_f \left\{ 1 - \frac{1}{e} (1-f^n) \right\} = \log_f \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 45.6$$

となる。($f=0.99$ のとき)

ℓ の極限值が有限であるということは n が十分に大きいとき、最初のごくわずかなお店に無条件で入店しなくても大きな確率で最もいい店にたどり着くことができるということを示している。

次に、 $f \neq 1$ の時、つまり疲労度を考慮しないとき、

$$\lim_{f \rightarrow 1} \frac{f-1}{e \log f} = \frac{1}{e}$$

これは疲労度なし (3) の結果と一致する。

“ルール”で一番いい店に入れる確率の期待値: E を求める。

i) 疲労度なし

$$E = \frac{1}{n} \int_0^n P dk = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{k}{n} \log \frac{n}{k} dk$$

$$E = \frac{1}{4}$$

ii) 疲労度あり

$$I(n) = \int_0^n P(\ell) d\ell \quad \text{とすると}$$

$$I(n) = \frac{(1-f)\{-Li_2(f^n) + Li_2(1) + f^n - 1 - n \log(1-f^n) \log f\}}{(1-f^n)(\log f)^2}$$

と表せる。

$$\text{ここで、} Li_2(x) \text{ は 2 重対数関数である。} Li_2(x) := - \int_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$\frac{d}{dn} I(n) \geq 0 \text{ かつ } I(0) = \int_0^0 P(\ell) d\ell = 0 \text{ より}$$

$$I(n) \geq 0$$

$$\text{また、} n - I(n) \geq 0 \text{ から}$$

$$0 \leq \frac{I(n)}{n} \leq 1$$

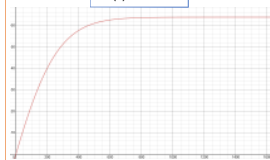
よって、 $E(n) = \frac{I(n)}{n}$ は“ルール”で一番いい店に入れる確率の期待値といえる。

3

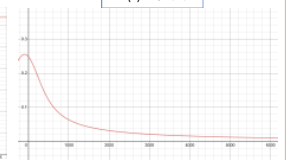
$$E(n) = \frac{(1-f) \left\{ - \sum_{k=1}^n \frac{f^{nk}}{k^2} + \frac{n^2}{6} + f^n - 1 - n \log(1-f^n) \log f \right\}}{n(1-f^n)(\log f)^2}$$

$$\approx 0.229 \quad (f=0.99, n=100 \text{ のとき}), 0.064 \quad (f=0.99, n=1000 \text{ のとき})$$

$Y=E(x)$ のグラフ



$Y=E(x)$ のグラフ



7. 結果(2)

n が十分大きく、 $f=0.99$ のとき、最初から

46 軒目までを無条件に入らず、その以降で一番いい店が現れたらその店に入店する。

このとき入店した店が全体の中で最も良い店である確率は37%である。これはランダム

に選ぶ確率よりも大きい。

8. 今後の展望

より現実的なモデルにするため、なるべくいいお店に入る手法を考案し、どのような確率になるのか調べたい。

また、数店舗を引き返すことを可能にしたときどうなるのかも調べたい。

$P(\ell)$ のそれぞれの条件でのグラフ。

