まえがき

こんにちは。兵庫県立神戸高等学校数学研究会リーダーの平野浩太郎です。2 年半前に数学研究会が復活してから(部員がいなくなり、1993 年に休部になった)、今回で２つ目の部誌です。復部当初に 1 年生だった私たちは現在 3 年生となり、活動も波に乗ってきました。部誌を通して私たちの活動を知っていただければ嬉しく思います。
さて、「1 を聞いて e を知る」(P12～P19)は、私を含む部員 4 人で、名古屋大学附属高等学校の SSH の数学の大会に参加したときに研究した内容です。その大会は「公募問題の解法の美しさ」「大学の先生の講義を踏まえた課題の解決」「商店街での数学の研究」の 3 段階の選考から構成されていて、私たちはそのすべての選考を勝ち抜きました。そして、アメリカに派遣されて現地の理系大学生に商店街での研究を発表することになっていました(残念ながら、昨今の新型コロナウイルスの流行のために派遣は中止になってしまいました)。大学生に発表するものとして作っていましたが、高校数学の範囲内で理解できるようになっていますので、読んでいただけると幸いです。それでは、数学の世界への扉であるこのページをめくって、数の美しさを感じ取って下さい。

リーダー　平野　浩太郎

目次

出す手の数を増やしたじゃんけんの期待値について

2 年 9 組 37 番　山本武

こんなことを思ったことはないだろうか。大勢でじゃんけんをしたとき、じゃんけんが決まるまで時間がかかる。一体平均的に何回かかるのだろうか。みなさんも一度は考えたことがあるだろう。そこで私は人数におけるじゃんけんにかかる回数の期待値について研究した。なお、ここでは、じゃんけんが決まるとは、特定の一人を選出するわけではなく、一つのグループからじゃんけんの結果によって複数のグループに分けられる状態になることを表す。

期待値・・・確率変数のすべての値に確率の重みを付けた平均値

1　一般的なグー、チョキ、パーのじゃんけん

定義として、一人一人において、グー、チョキ、パーのどれを出すかは同様に確からしく（いずれも 3 分の 1)、前に出した手が次に出す手の確率に影響を与えない独立試行である。

n 人でじゃんけんをすることを考える。(n は 2 以上の自然数)

じゃんけんが一回で決まる確率を Pn とすると（0<Pn<1)、(1－Pn）の確率でもう一度じゃんけんを行うことになる。また、さらに（1－Pn）の確率でもう一度じゃんけんをすることになり、さらに（1－Pn）の確率で・・・・・・と言うふうに、それぞれ x 回目の試行において（1－Pn）の確率で（x＋1）回目の試行を行うので、求める期待値は、

$$1 + (1 - \mathrm{Pn}) + (1 - \mathrm{Pn})^2 + (1 - \mathrm{Pn})^3 + \cdots\cdots$$

となり、これは 0<Pn<1 より無限等比級数を用いて

※無限等比級数 $-1 < r < 1$ を満たす実数 r において、$1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots=\frac{1}{1-r}$が成り立つ。

$$\frac{1}{1-(1-P_n)}=\frac{1}{\mathrm{Pn}} \quad \cdots\cdots①$$

と表せる。よって、じゃんけんにかかる回数の期待値は一度で決まる確率の逆数となることが分かる。

i）二人のじゃんけん、つまり、n=2 のとき

一人目、二人目と番号を付けても一般性は失われない。

一人目の出す手をグーとしたとき、二人目の出す手がチョキまたはパーのときじゃんけんが決まりグーのときはあいことなる。つまり、一人目がグーを出してじゃんけんが一度で決まる確率は$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$である。これは、一人目がチョキのときもパーのときも同じなので、じゃんけんが一度で決まる確率P_2は

$P_2=\frac{2}{9}\times 3=\frac{2}{3}$である。

したがって、①より二人でじゃんけんをしたとき、かかる回数の期待値は$\frac{3}{2}=1.5$(回)である。

ii）3 人以上のじゃんけん、つまり n≥3 のとき

n 人でじゃんけんが決まっている状態ならば、n 人それぞれが出している手は、2 種類なので、(n＋1) 人目が出して同じようにじゃんけんが決まった状態になる確率は$\frac{2}{3}$である。

また、n 人でじゃんけんが決まっていなくても n 人がすべて同じ手を出している場合は（n＋1）人目が出してじゃんけんが決まった状態になる確率は$\frac{2}{3}$である。n 人目までが同じ手を出す確率は、2 人目から n 人目までが 1 人目と同じ手を出す確率と考えられるので、

$P_{n+1}=\frac{2}{3}P_n+(\frac{1}{3})^{n-1}\cdot\frac{2}{3}$……②　これを 2 通りの方法で解いて$P_n$の一般項を出す。

漸化式を解く

1　②÷$(\frac{1}{3})^{n+1}$

$3^{n+1}P_{n+1}=2\cdot 3^nP_n+6$

$a_n=3^nP_n$とおくと

$a_{n+1}=2a_n+6$

$a_{n+1}+6=2(a_n+6)$

$a_2+6=12$ より

$a_n+6=3\cdot 2^n$

$a_n=3\cdot 2^n-6$

$a_n=3^nP_n$より

$3^nP_n=3\cdot 2^n-6$

$\therefore P_n=\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$

〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

等比数列の和

初項 a、公比 r（r≠ 1）の n 項からなる等比数列の和は

$$a+ar+ar^2+..+ar^{n-1}=a(1+r+r^2+..+r^{n-1})$$

$$=a\frac{r^n-1}{r-1}$$

2　$P_{n+2}=\frac{2}{3}P_{n+1}+(\frac{1}{3})^n\cdot\frac{2}{3}$

−)　$\frac{1}{3}P_{n+1}=\frac{2}{9}P_n\quad+(\frac{1}{3})^n\cdot\frac{2}{3}$……②×$\frac{1}{3}$

$P_{n+2}-\frac{1}{3}P_{n+1}=\frac{2}{3}(P_{n+1}-\frac{1}{3}P_n)$

$b_n=P_{n+1}-\frac{1}{3}P_n$とおくと……③

$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n$

$b_2=\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$より

$b_n=\frac{4}{9}\cdot(\frac{2}{3})^{n-2}=(\frac{2}{3})^n$

$P_{n+1}-\frac{1}{3}P_n=(\frac{2}{3})^n$（③より）……④

$P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+(\frac{2}{3})^{n-1}$

$=\frac{1}{3}\{\frac{1}{3}P_{n-2}+(\frac{2}{3})^{n-2}\}+(\frac{2}{3})^{n-1}$（④より）

$=\frac{1}{9}P_{n-2}+\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{n-2}+(\frac{2}{3})^{n-1}$（④より）

・・・・・・

$=\frac{1}{3^{n-2}}P_2+\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^3+\cdots+\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{n-2}+(\frac{2}{3})^{n-1}$

$=\frac{1}{3^{n-1}}\left(2+2^2+2^3+2^{n-2}+2^{n-1}\right)$

$=\frac{2^{n-1}-1}{3^{n-1}}$(等比数列の和　左参照)

$\therefore P_n=\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$

$P_n=\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$となる。…⑤

よって、n 人でじゃんけんをしたときのじゃんけんにかかる回数の期待値は

$\frac{1}{P_n}=\frac{3^{n-1}}{2^n-2}$となる。これは、n＝2 のときも成り立つ。

２　じゃんけんの手が３より大きいときを考える。

定義として、じゃんけんの手を(2m＋1)個とする。(m≥ 2)

ここで、手を奇数に限定したのは、各手の強さ（勝ち負けの割合）を平等にするためである。

各手同士の勝ち負けの組み合わせを、次のように定める。

1.　(2m＋1)個の手を、1，2，3，･･･，2m，2m＋1 と数値化する。

2.　出された手の数値 a,b について、a－b≡1，2，3，･･･，m(mod(2m+1))ならば、a が b に勝つ。

但し、y≡r(modx)とは、y－r が x で割り切れることを表す。

例）m＝2 のとき

じゃんけんの手が 5 個

1 と 3 は、3－1≡2(＝m)(mod5)となるので、3 が勝つ。

2 と 5 は、2－5＝－3≡2(＝m)(mod5)となるので、2 が勝つ。

また、3 種類以上の手が出された場合については、じゃんけんが決まったかどうかの判定は次の通り

各手を数直線上でより強いものをより右に、弱いものを左にする。

出たすべての手を数直線上に並べたとき、どの 2 手についても強いものが右、弱いものが左になる関係が成り立っている、つまり、数直線で並べたときの最も右にある手（これより後は最強手と呼ぶ）から最も左にある手（これより後は最弱手と呼ぶ）を引いた値がm以下になるとき、じゃんけんが決まったものとする。

例）m＝3 のとき

じゃんけんの手は、1,2,3,4,5,6,7 の 7 個

n＝4 のとき

4 人の出した手が、それぞれ 1,2,3,4 の場合

1 を最弱手とすると、数直線上に並べたとき最も右になる 4 との差が 3(＝m)になるので、この状態はじゃんけんが決まっている。

4 人の出した手が、3,4,6,7 のとき、

各手の勝敗を満たす一つの数直線が存在しない、つまり、最弱手となる手が存在しないので、この状態はじゃんけんが決まっていない。

(2m＋1)通りの手で n 人でじゃんけんしたとき、一回でじゃんけんが決まる確率を Pmn とおく

Pmn の分母は、起こりうる全ての場合の数なので、

$(2m+1)^n$である。

Pmn の分子を求める。

じゃんけんの手が 3 以上の奇数、つまり $m \geq 2$ のとき
じゃんけんが決まったものとして、最強手から最弱手を引いた値を k とおき、そのときの場合の数を $f(k)$とおくと、求める値は、

$\sum_{k=1}^{m} f(k)$である。

k＝m のとき、最弱手の場合の数は（2m＋1）通りで n 人がその最弱手に勝つかあいこになる手を出す場合の数なので、$(2m+1)(m+1)^n$通り。しかし、差が m になる最弱手もしくは最強手が含まれていない場合を除外するので、 $f(m)=(2m+1)\{(m+1)^n-2m^n+(m-1)^n\}$
$k \leq m-1$ のとき、最弱手の場合の数は（2m＋1）通りで n 人がその最弱手に差が k 以下で勝つかあいこになる手を出す場合の数から差が k になる最弱手もしくは最強手が含まれていない場合を除外して

$$f(k)=(2m+1)\{(k+1)^n-k^n+(k-1)^n\}$$

よって$\sum_{k=1}^{m} f(k)$

$$=(2m+1)\left[\begin{array}{c}\{(m+1)^n-2m^n+(m-1)^n\}+\{m^n-2(m-1)^n+(m-2)^n\}+\cdots \\ \cdots+\{3^n-2\cdot 2^n+1^n\}+\{2^n-2\cdot 1^n+0^n\}\end{array}\right]$$
$$=(2m+1)\{(m+1)^n-m^n-1^n+0^n\}$$
$$=(2m+1)\{(m+1)^n-m^n-1\}$$

よって、$Pmn=\dfrac{\sum_{k=1}^{m} f(k)}{(2m+1)^n}=\dfrac{(2m+1)\{(m+1)^n-m^n-1\}}{(2m+1)^n}=\dfrac{(m+1)^n-m^n-1}{(2m+1)^{n-1}}$

∴ n 人が$(2m+1)$手でじゃんけんをしたときに、じゃんけんが決まるまでかかる回数の期待値は、

$\dfrac{1}{Pmn}=\dfrac{(2m+1)^{n-1}}{(m+1)^n-m^n-1}$である。

これは、⑤より$m=1$、つまり通常のじゃんけんの場合も成り立つ。

地球を超えた(物理)暗号解読の天才

2-9 佐々木優

1 はじめに

皆さんはサマーウォーズという映画をご存知でしょうか。バトルのシーンも迫力がありますが、ラストシーン、主人公健二がパスワードを解読するシーンは非常に見ていてハラハラして面白いですよね。さて、ここで健二はどのようにしてこのパスワードを解読していたのでしょうか。作中ではモニターいっぱいに数字が映し出されていましたが、この数字をどうやって使うのでしょう？今回は健二が暗号を解読した方法、いかに健二の計算能力が優れていたかについて考えていくことにします。

2 RSA 暗号の概要

健二の解読していた暗号はRSA暗号というものです。簡単に言うと、RSA 暗号は巨大な合成数の素因数分解の困難さを安全性の根拠としている暗号です。一体どれほど巨大な合成数を用いているかというと、一般的に 10 進数で約 2000 桁程度の長さの数が用いられています。

3 RSA 暗号の仕組み

RSA 暗号の仕組みを知るためには、まず前提として公開鍵暗号方式を知る必要があります。

ここでは簡単に、公開鍵は誰もが鍵の情報を知れる鍵、秘密鍵は作成した本人のみがその情報を知っている鍵とします。そして、情報の送信者を A さん、受信者を B さん、B さんの秘密鍵を C、C を使って生成（鍵の生成方法などは省略）される B さんの公開鍵を D とします。まず A さんは D を取得し、D を使って送信文を暗号化します。D は C を使って暗号文を復号できるように作られてあるので、B さんは容易に復号することができます。これが RSA 暗号を理解するのに必要な最低限の公開鍵暗号の仕組みです。

では、いよいよ本題に入っていきましょう。実際に使われている暗号には、安全性を高めるために各工程で様々な変化が加えられていますが、ここでは根幹となる簡単な仕組みを見ていきます。

まず、巨大な素数p, qを生成し、$n = pq$とします。次に、$(p-1)(q-1)$と互いに素となるようにk_1を取ります。また、k_2を$k_1k_2 \equiv 1\ mod (p-1)(q-1)$となるように定めます。

（k_2は$k_1k_2 - (p-1)(q-1)l = 1 (l \in \mathbb{N})$ の自然数解の一つなので、ユークリッドの互除法から簡単に求まります。）

そして、n, k_1を公開鍵、k_2を秘密鍵とします。このとき、暗号文 C は送りたい文を$m(0 \leqq m < n)$として、$C = m^{k_1} \bmod \mathrm{n}$ と定義します。C を復号するには、$C^{k_2} mod\ n$

を計算すると、元の文 m と一致します。

試しに小さな数を用いて計算してみましょう。$p = 3, q = 7, m = 4, \mathrm{k}_1 = 5, \mathrm{k}_2 = 5$とします。

$$C = 4^5 mod\ 21$$
$$= 1024\ mod\ 21$$
$$= 16$$

次に、$C^{k_2} mod\ n$を計算します。

$$C^{k_2} \bmod \mathrm{n}$$
$$= 16^5 mod\ 21$$

$= 1048576\ mod\ 21$

$= 4$

となり、見事に一致しましたね。

次は少し難しくして、ひらがなを五十音順に濁音を含めて01,02, …と番号を振ります。そして$k_1 = 3, k_2 = 7$ $n = 55$として、「とら」という文字を送ることを考えます。「と」は 20, 「ら」は 39 ですが、文はnより短くないといけないので、送る文は 2039 ではなく、20 39 となります。では暗号文を求めてみましょう。

$$20^3 mod 55$$
$$\equiv 8000\ mod 55$$
$$\equiv 25\ mod 55$$
$$39^3 mod 55$$
$$\equiv 59319\ mod 55$$
$$\equiv 29\ mod 55$$

よって暗号文は 25 29 で、これを復号してみると、

$$25^7 mod 55$$
$$\equiv 6103515625\ mod 55$$
$$\equiv 20$$
$$29^7 mod 55$$
$$\equiv 17249876309\ mod 55$$
$$\equiv 39$$

となり、やはり元の文「20 39」に一致することがわかります。

ではなぜ$C^{k_2} mod\ n$がm に一致するのかを考えていきましょう。

（証明）

$m^{k_1 k_2} \equiv m\ mod\ n$を示せば良い。

m が nと互いに素なとき、

$k_1 k_2 - 1 = (p-1)(q-1)N (N \in \mathbb{N})$

と表せるので、

$$m^{k_1 k_2} = m \cdot m^{(p-1)(q-1)N} \equiv m \bmod \mathrm{p}$$
$$m^{k_1 k_2} = m \cdot m^{(q-1)(p-1)N} \equiv m\ mod\ q$$

$n = pq$より、$m^{k_1 k_2} \equiv m\ mod\ n$

m が pの倍数のときは自明。

（証明にはフェルマーの小定理、中国剰余定理を用いた。）

4　RSA 暗号の解読

では、今度は逆に解読してみましょう。と言っても我々一般人には何十桁もの素因数分解はおそらく不可能ですので、より小さな素数を用いますが。$n = 113, k_1 = 5$として、暗号文「108 130 93」を解いてみましょう。まず、nを素因数分解して、$p = 7, q = 19$を得ます。そして $(p-1)(q-1)$を計算して、108 となります。次は $5k_2 - 108l = 1$を解いて$k_2 = 65$となります。次は 65 乗の計算となりますが、答えまで全部載せてしまうと面白くないのでここでは伏せておきます(最後に答えが載っています)。合同式の累乗ではあまりをうまく使うと計算が楽になる場合があるので、あとは気合でなんとかしましょう。ちなみに出てきた数字を五十音順に（濁音は「ん」のあとに、半濁音は「ぼ」のあとに並べてください）変換すると文字列がわかります。

5　RSA 暗号の安全性

暗号に求められるのは安全性です。先程計算でもわかったように、たった 1 桁 2 桁程度の素数を用いた数字あそびでしたが、途中には電卓を使わないと計算なんてできないような工程も含まれていました。現在、我々が使っている RSA 暗号の規格には RSA4096 が徐々に使われるようになってきており、RSA4096 では 2048bit（最大約 616 桁）の素数が 2 つ生成されています。例では p,q が 2 桁程度だったために簡単に k_2 が求まってしまいますが、実際には何百

桁もの素因数分解が要求されるため、強引に解読しようとしても途方も無い時間がかかり、(今のところは)安全性が確保されています。また、実際の暗号では元の文に、乱数で生成されたある程度大きな数字を加えることで、より安全性が保たれるようになっています。
それでもやはり近年ではコンピュータの性能が向上し、RSA 暗号よりも安全性の高い暗号が使われ始めているようです。

6　健二の計算能力

それでは最後に、皆さんお待ちかね？であろう健二の計算能力について見ていきましょう。注目すべきシーンは映画でも最終盤のシーン。OZ では 2056 桁の RSA 暗号が使われており、これをわずか 29.96 秒で解ききっています。これをコンピュータで行おうとするとどうなるのでしょうか。まず、作中では最高 2056 桁の暗号が使われている設定になっていますが、これはおそらく 2048 桁の間違いではないかと思います。2 の累乗を取っていくと 2048 の次は 4096 だからです。なので今回は最高 2048 桁と見積もって計算していきたいと思います。10 進数で 2048 桁以下の数字は10^{2048}個。最後の暗号は詳細が見えなくなっており詳しいことはわかりませんが、ここでは仮に 2048 桁と仮定しておきます（映画の大トリ的シーンなので難易度は高いだろうと考えた)。総当り的に探索しようとすると、まず小さい方から順に10^{1024}回最低でも因数分解を試みなくてはならない。また、偶数は鍵として生成されないので、これの半分5×10^{1023}回因数分解を試みる必要があることがわかる。現在、世界最高のスーパーコンピュータは毎秒 20 京回の計算が可能です。1 京=10^{16}なので、このスパコンを用いると 25×10^{1005}秒かかることになります。健二は約 30 秒でこれをやってのけたので、単純な計算能力はなんと世界最高スパコンの$\frac{5}{6}\times10^{1005}$倍。このスパコンの敷地面積は約$5800m^2$なので、健二の脳内コンピュータを再現するには $4.8\times10^{1009}m^2$もの面積が必要です。地球の表面積は約$5.1\times10^{14}m^2$なので、地球約 9.4×10^{995}個分。作中での健二は国際数オリに出場できていませんでしたが、こんな人を超える逸材がゴロゴロいる世の中は怖いですね。最後に、暗号の答えですが「10 03 75」となり、答えは「こうべ」でした。RSA 暗号を解読する大会が行われているそうなので、物足りなかった皆さんはそれに挑戦することをおすすめします。

1を聞いてeを知る

平野浩太郎　福田大智　松川健人　山内悠理子

1.　はじめに

皆さんはご飯を食べるためにショッピングモールなどでお店探しをしていると決めきることができず、結局引き返すことになってしまったような経験はありませんか？

そこで、ショッピングモールなどを引き返さずに自分たちにとって一番良い店に入れる確率が高くなるような方法がないかと考えました。

2.　状況が簡単な場合

2.1.　条件とルール

この問題を解決するため以下の条件を定めました。

・店舗数はn軒（$n \in \mathbb{N}$）

・各店には満足度と呼ばれる0より大きい互いに異なる実数が定められており、x軒目の満足度をa_xとおく。

・一番いい店を最も満足度の値が大きい店とする。

・店にたどり着くたびにその店に入るか入らないかをその場で決断しなければならない。

・一度入らないと決めた店には二度と戻ることはできない。

・入店を決めたらその時点で店選びは終了する。

そして一番いい店に入れるよう次のルールを定めました。

ルール：k軒目($1 \leqq k < n$)までを無条件に入店せず、$k+1$軒目以降で「今までで最も満足度が大きい($\therefore$ a_xが最も大きい)店」に入店する。n-1軒目も入店しなかった場合はn軒目に必ず入店する。

2.2.　命題1

上記の条件とルールのとき、$\frac{n}{e}$軒目までを無条件に入店せず、$\frac{n}{e}+1$軒目以降で「今までで最も満足度が大きい($\therefore$ a_xが最も大きい)店」に入店する。n-1軒目も入店しなかった場合n軒目に必ず入店する。

このとき一番いい店に $\frac{1}{e}$ の確率で入れる。

2.3.　証明

t番目に1番いいお店がある確率は $\frac{1}{n}$ 。このときt番目のお店を選べる確率は

i）$t \leqq k$のとき、無条件に入店しない店に一番いい店があるので0

ii）$t > k$のとき、$t-1$軒目までの一番いい店がk軒目にないといけないので($k+1$軒目以降に$t-1$軒目までの一番いい店があるとその店に入ってしまい、t番目の店に入れない)、

一番いい店に入れる確率は

$$\frac{k}{t-1}$$

よって１番いいお店を選べる確率Ｐは各々のｔについて和をとって

$$\mathrm{P}=\frac{1}{n}\sum_{t=k+1}^{n}\frac{k}{\ell-1}=\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n-1}\right)$$

これを最大にするｋを求めればよい。

2.3.1.　補題１

ｎが十分に大きいとき、

$$1+\frac{1}{2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n}\simeq\log n \quad \text{(調和級数)}$$

が成り立つ。

【証明】

不等式

$$\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}\,dx<1+\frac{1}{2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n}<1+\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$$

が成り立つ。（図示すると分かる）よって、

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n}<1+\log n$$

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n}-\log n \quad \text{と定めると}$$

a_nは単調減少するので、不等式から $0<a_n<1$ である。よって主張が従う。■

補題１から、

$$\mathrm{P}=\frac{k}{n}\sum_{t=k+1}^{n}\frac{1}{\ell-1}\simeq\frac{k}{n}\log\frac{n}{k}$$

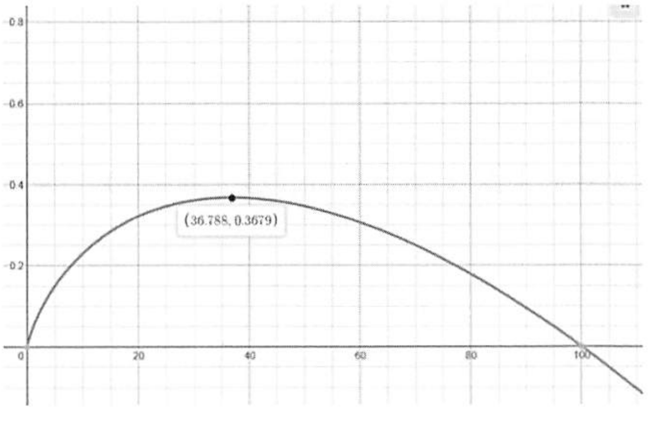


Figure 1：y=P のグラフ（横軸：ｋ、縦軸：y=P）

Ｐをｋで微分して

$$\frac{d}{dk}P=\frac{1}{n}\log\frac{n}{k}-\frac{1}{n}$$

よって P を最大にする $\frac{n}{k}$ は

$$\frac{n}{k}=e$$

$$e\coloneqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

つまり k $=\frac{n}{e}$ のときP は最大となりその確率は

$$P=\frac{\log e}{e}=\frac{1}{e}\simeq 37\%$$

となる。 ■

3. 少し複雑に

前章では人が歩く、つまり疲れるということを考慮していません。より現実的な数理モデルに近づけるためにはこのことを以下では考慮しましょう。

ここで、2 の満足度の定義に加えて歩行距離に対応する疲労係数 d(0<d<1)が存在し、x 軒目の満足度 a_x が歩行による疲労度により $d^{x-1}a_x$ になるとします。$b_x= d^{x-1}a_x$ とおく。

そして、ルールを設ける。

〔ルール〕 l 軒目($1\leqq l< n$)までを無条件に入店せず、 l 軒目以降で「今までで最も満足度が高い店に(b_x が大きいが最も大きい)店」に入店する。n-1 軒目も入店しなかった場合は n 軒目に必ず入店する。(2 と同様)

3.1. 命題 2

n が十分大きく、d= 0.99 のとき、最初から約 46 軒目までを無条件に入らず、その以降で一番いい店が現れたらその店に入店する。

このとき入店した店が全体の中で最も良い店である確率は約 37%である。

3.2. 証明

3.2.1. def1

a_xがa_1~a_nの中で最も大きい確率は x によらず $\frac{1}{n}$ なのでb_xがb_1~b_nの中で最も大きい確率の比は 1:d:d^2:・・・:d^{n-2}:d^{n-1}とする。

3.2.2. def2

よってb_xがb_1~b_nの中で最も大きい確率を

$$f(x)=\frac{(1-d)d^{x-1}}{1-d^n}$$

と定義する。

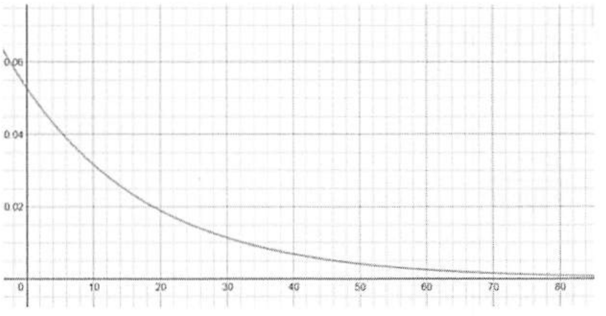


Figure 2：y=*f(x)*のグラフ（横軸：x、縦軸：y= *f(x)*）

s番目に1番いいお店があるとする。ここでs番目のお店を選べる確率は

1）s≦ ℓ　のとき・・・0

2）s＞ ℓ　のとき

$$g(s) = \frac{\sum_{j=1}^{l} f(j)}{\sum_{i=1}^{s-1} f(i)} = \frac{1-d^l}{1-d^{s-1}}$$

と表せる。

よって1番いい店に入れる確率は

$$P(l) = \sum_{t=l+1}^{n} f(s)g(s)$$

$$\simeq \int_{l+1}^{n+1} f(s)g(s)\,ds = \frac{(1-d)(1-d^l)}{1-d^n}\int_{l+1}^{n+1} \frac{d^{s-1}}{1-d^{s-1}} ds$$

$$\therefore P(l) = \frac{(1-d)(1-d^l)}{\left(1-d^n\right)\log f}\log\frac{1-d^l}{1-d^n}$$

となる。

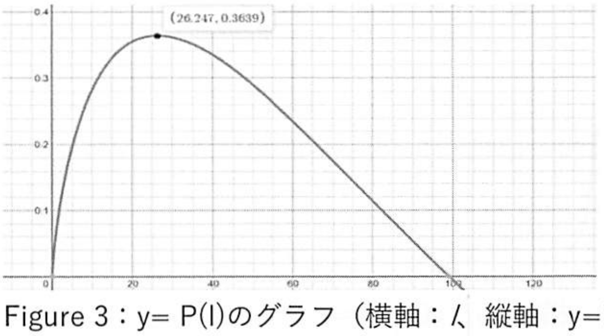


Figure 3：y= P(l)のグラフ（横軸：ℓ、縦軸：y=P）

$$\frac{d}{dl}P(l) = \frac{(d-1)d^l}{1-d^n}\left\{\log\left(\frac{1-d^l}{1-d^n}\right)+1\right\}$$

なので、$P(l)$を最大にする l は

$$l = \log_d \left\{1 - \frac{1}{e}(1 - d^n)\right\}$$

で、このとき $P(l)$は

$$P(l) = \frac{d-1}{e \log d}$$

となる。
ここで、 n が無限大の時を考えると
d を n に無関係な定数として、

$$\lim_{n\to\infty} s = \lim_{n\to\infty} \log_d \left\{1 - \frac{1}{e}(1 - d^n)\right\}$$

$$= \log_d \left(1 - \frac{1}{e}\right) \simeq 45.6$$

となる。（d=0.99 のとき）
ちなみに d=0.99 は 69 乗すると約 0.5 になります。
次に、d が 1 の時、つまり疲労度を考慮しないとき、

$$\lim_{d\to 1} P = \lim_{d\to 1} \frac{d-1}{e \log d} = \frac{1}{e}$$

となる。 ■
ここで面白いことに、s は定数になります。これは n が十分大きいとき、最初のごくわずかなお店に無条件で入店しないだけで大きな確率で最もいい店にたどり着くことができるということを示しています。また、疲労度が 1 とは 2 の状況と一致しておりそのときの結果は一致しています。

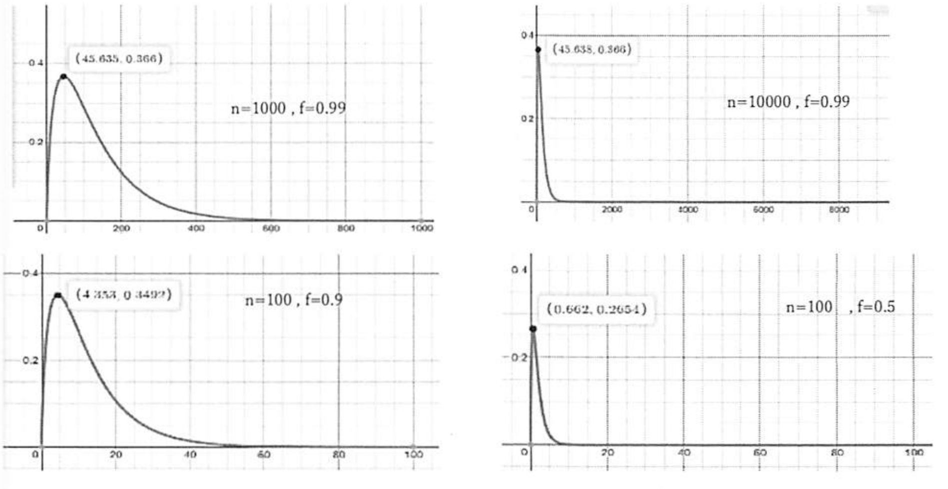


Figure 4：色々な条件での y= P(l)のグラフ（横軸：l、縦軸：y=P）

4. 期待値

ルールにおいて一番いい店に入れる確率の期待値：E を求めてみましょう。

4.1. 命題 3

疲労度なしのとき$E=\frac{1}{4}$ であり、

$$疲労度ありのとき\ \mathrm{E}=\frac{(1-f)\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^{nk}}{k^2}+\frac{\pi^2}{6}+d^n-1-n\log(1-d^n)\log d\ \right\}}{n(1-d^n)(\log d)^2}$$

である。

4.2. 証明

i ）疲労度なしのとき

$$E=\frac{1}{n}\int_0^n P\ dk=\frac{1}{n}\int_0^n\frac{k}{n}\log\frac{n}{k}\ dk$$

$$E=\frac{1}{4}$$

ii ）疲労度あり

$$I(n)=\int_0^n P(l)dl\quad とすると$$

$$=\int_0^n\frac{(1-d)(1-d^l)}{\left(1-d^n\right)\log f}\log\frac{1-d^l}{1-d^n}dl$$

（$d^l=t$と置換すると上手くいきます）

$$I(n)=\frac{(1-d)\{-Li_2(d^n)+Li_2(1)+d^n-1-n\log(1-d^n)\log d\ \}}{(1-d^n)(\log d)^2}$$

と表せる。

（ここで、$\mathrm{Li}_2(\mathrm{x})$は 2 重対数関数である。$Li_2(x)\coloneqq-\int_0^x\frac{\log(1-t)}{t}dt\ \ |x|<1$ ）

$$\frac{d}{dn}I(n)\geqq 0\ かつ\ I(0)=\int_0^0 P(l)dl=0\ より$$

$$I(n)\geqq\ 0$$

$$また、n-I(n)\geqq\ 0\quad から$$

$$0 \leqq \frac{I(n)}{n} \leqq 1$$

よって、

$$E(n) = \frac{I(n)}{n} \quad \text{は"ルール"で一番良い店に入れる確率の期待値といえる。}$$

4.2.1.　補題 2

$$-\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

【証明】

$$\frac{\log(1-t)}{t}$$

をマクローリン展開すると、

$$\frac{\log(1-t)}{t} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} - \dots, = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

一様収束するので積分とΣが交換可能で、項別積分すると

$$-\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

■

4.2.2.　補題 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

【証明】

$\mathrm{k} = 1,2,\cdot\cdot\cdot,n$に対して$\theta_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$　とおく。

$0 \leqq \theta_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より、$\sin\theta_k \leqq \theta_k \leqq \tan\theta_k$を得る。逆数をとって 2 乗すると

$$\frac{1}{tan^2\theta_k} \leqq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqq \frac{1}{sin^2\theta_k} \text{なので}$$

$$\frac{\pi^2}{tan^2\theta_k(2n+1)^2} \leqq \frac{1}{k^2} \leqq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(1 + \frac{1}{tan^2\theta_k}\right)$$

k=1 から n までの和をとって

$$\frac{\pi^2}{\tan^2\theta_\mathrm{k}(2\mathrm{n}+1)^2} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\tan^2\theta_\mathrm{k}} \leqq \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{k}^2} \leqq \frac{\pi^2}{(2\mathrm{n}+1)^2}\left(\mathrm{n} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\tan^2\theta_\mathrm{k}}\right)$$

$\mathrm{n} \in \mathbb{N}$のとき $\sin(2n+1)\theta_k = 0$ なので

$$z_1 = (\cos\theta_k + i\sin\theta_k)^{2n+1}$$ の虚部は 0 。また $\sin\theta_k \neq 0$ なので

$$\frac{z_1}{sin^{2n+1}\theta_k} = z_2 = \left(\frac{1}{tan\theta_k} + i\right)^{2n+1}$$ の虚部も 0

z_2の虚部を$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + a_0$とおくと、$f\left(\frac{1}{tan^2\theta_k}\right) = 0$

解と係数の関係より

$$\frac{1}{n^2}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\tan^2\theta_{\mathrm{k}}} = \frac{2n-1}{3n}$$

よって $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2}{\tan^2\theta_{\mathrm{k}}(2\mathrm{n}+1)^2} \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\tan^2\theta_{\mathrm{k}}} = \frac{\pi^2}{6}, \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2}{(2\mathrm{n}+1)^2}\left(\mathrm{n} + \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\tan^2\theta_{\mathrm{k}}}\right) = \frac{\pi^2}{6}$

したがって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{k}^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

■

補題２、３より

$$E(n) = \frac{(1-f)\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^{nk}}{k^2} + \frac{\pi^2}{6} + d^n - 1 - n\log(1-d^n)\log d\right\}}{n(1-d^n)(\log d)^2}$$

≃0.229（d=0.99,n=100 のとき）,0.064（ d=0.99,n=1000 のとき）

■

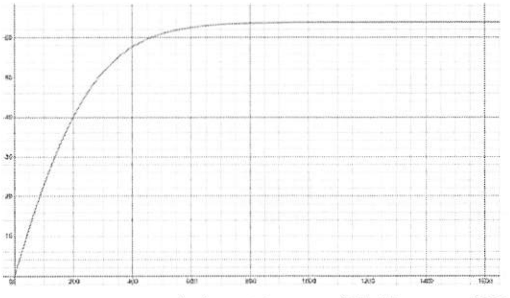


Figure 5：y= I(n)のグラフ（横軸：n、縦軸：y= I(n)

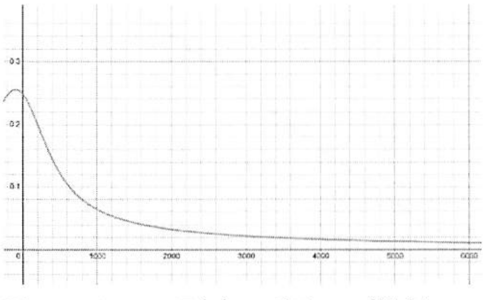


Figure 6：y= E(n)のグラフ（横軸：n、縦軸：y= E(n)

5. 展望

より現実的なモデルにするため、なるべくいいお店に入る手法を考案し、どのような確率になるのか調べたいと思っています。

また、数店舗を引き返すことを可能にしたときどうなるのかも調べたいと思っています。

複素数の複素数乗は複素数か？

3-9　森田啓介

1.　　複素数の定義

まず、

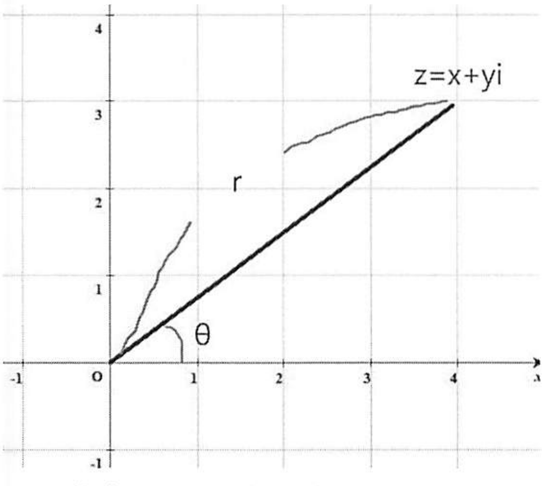
$x^2 = -1$

は本来解を持たないが、解を持つと仮定した場合の解を　x=i　とおく。これが虚数と定義される。

そして複素数は、

$$x + iy$$

と表し、座標平面上の点（x,y）に複素数 x+yi を目盛ったものを複素平面といい、横軸を実軸、縦軸を虚軸という。



また、複素平面上で点0から z=x+yi までの距離 r が z の絶対値とされ｜z｜と表す。そして半直線 oz と実軸の交角 θ を z の偏角とし argz とも表す。このとき、$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$、となることから

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と書くことができ、この形を複素数 z の極形式という。

2.　実数の複素数乗

複素数の複素数乗を求めるために、まずは実数の複素数乗を求める。マクローリン展開の式

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

から

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

が求められる。ここから

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cosy + isiny)$$

が導出できる。

加えて、自然対数の底 e について、複素数 ω は

$$\omega = \log z \leftrightarrow z = e^{\omega}$$

と導入し、偏角を求めると無限多価関数となるため主値 argz を取った時の logz を大文字で Log z と書く。

$$z = e^{\omega} = e^{u+iv} = e^v(cosv + isinv)$$

$$\begin{cases} |z| = e^u \\ argz = v \end{cases} \therefore \begin{cases} u = log|z| \\ v = argz \end{cases}$$

従って

$$\omega = u + iv = \log|z| + iargz$$

3.　複素数の複素数乗

ここから本題に入っていくが、

$$(a + bi)^{c+di}$$

ただし a,b,c,d は実数、i は虚数単位とする。を求めていく。

$$\alpha^{\beta} = e^{\beta \operatorname{Log} \alpha}$$

であることを利用して、

$$(a+bi)^{(c+di)} = e^{(c+di)\mathrm{Log}(a+bi)}$$

である。

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(a+bi) &= \log|a+bi| + \arg(a+bi)\\ &= \log|a+bi| + i\theta\end{aligned}$$

ここで θ を

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

とおいた。

i) $a=0$ のとき

$$\begin{aligned}(a+bi)^{(c+di)} &= e^{c\log\sqrt{a^2+b^2}-d\theta}\cdot e^{i\{d\log\sqrt{a^2+b^2}+c\theta\}}\\ &= e^{c\log\sqrt{a^2+b^2}-d\theta}\left\{\cos(d\log\sqrt{a^2+b^2}+c\theta)+i\sin(d\log\sqrt{a^2+b^2}+c\theta)\right\}\end{aligned}$$

よって

$$e^{c\log\sqrt{a^2+b^2}-d\theta}\cdot\cos(d\log\sqrt{a^2+b^2}+c\theta)$$

は実数だから、

$$\sin(d\log\sqrt{a^2+b^2}+c\theta)=0$$

のとき $(a+bi)^{(c+di)}$ は実数となる。

ii) $a\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}bi^{(c+dj)} &= e^{(c+di)\mathrm{Log}\,bi}\\ &= e^{c\log b-d\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}\cdot e^{i\left\{d\log b+\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)c\right\}}\\ &= e^{c\log b-d\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}\left\{\cos\left(d\log b+\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)c\right)+i\sin\left(d\log b+\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)c\right)\right\}\end{aligned}$$

よって

$$e^{c\log b-d\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}\cdot\cos\left(d\log b+\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)c\right)$$

は実数だから

$$\sin\left(d\log b+\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)c\right)=0$$

のとき $(a+bi)^{(c+di)}$ は実数となる。

編集後記

だから、$a=c=0$, $b=d=1$ とすれば i^i は実数になります

複素数階微積分学

松川 健人

2020 年 8 月 8 日

目次

1 はじめに

目次を見てなんだこのページ数はと思った人が大半ではないでしょうか。私自身、いざ全員の部誌をまとめると全体の半分近くのページ数を使ってしまっていて驚いています。しかし裏を返すとかなり丁寧に分かりやすく書いたということなので最後まで読んでいただけると幸いです。

さて、複素数階微積分と聞くと何を思い浮かべるでしょうか。複素数値関数の微積分？ いえいえ、違います。複素数階微分したり積分したりするのです。例えば 0.5 階微分したり、$\sqrt{\pi}$ 階微分するのはどうすればいいのでしょうか。上手く定義すればできるはずです。

何度か重積分 (多変数の積分) が説明なく使われていますが、それ以外は高校数学程度の知識を前提として書いています。

証明の詳細や操作が分からなくなるかもしれません。そのとき大事なのはその証明で”何”が明らかになったかということです。なのでそういう事態になったときは事実を追いかけながら読むといいかもしれません。

独自の研究内容は第 3 章の一部、第 4,5,6 章、第 7 章の一部です。

2　複素数階の微積分

では、複素数階の微分とはどのように定義すればよいのでしょう。一般に関数 $f(x)$ を微分するとは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

と定義されます。しかし、この定義を一般の実数 s に拡張することは難しそうです。なので、微分演算子 D を導入します。

$$D=\frac{d}{dx}$$

この微分演算子は普通の数のように扱うことができます。（自由に加減乗除ができるということ）このことはラプラス変換と等価なことから示されますが今回は省略します。
また、

$$\frac{1}{D}=D^{-1}\left[f(x)\right]=\int f(x)dx$$

と定義します。

2.1　複素数階の積分

ここで D^{-s} が計算できれば s を実数として複素数階の積分が定義できそうです。D^{-n} は

$$D^{-n}\left[f(x)\right]=\int_a^x\int_a^{x_1}\cdots\int_a^{x_{n-2}}\int_a^{x_{n-1}}f(x)dx_n dx_{n-1}dx_{n-2}\cdots dx_1 \tag{1}$$

と表せます。($n\in\mathbb{N}$,a は実数）インテグラルがたくさんついて恐ろしくも見えますが、上の積分はただ n 回積分を繰り返しただけに過ぎません。(1) の右辺を計算しましょう。ここで次の補題を証明します。

補題 1　反復積分に関するコーシーの公式

$$\begin{aligned}D^{-n}\left[f(x)\right]&=\int_a^x\int_a^{x_1}\cdots\int_a^{x_{n-2}}\int_a^{x_{n-1}}f(x)dx_n dx_{n-1}dx_{n-2}\cdots dx_1\\&=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)dt\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明 1　$n=1$ のとき
定義

$$D^{-1}\left[f(x)\right]=\int f(x)\ dx$$

より成り立つ。

$n=k$ のとき補題 1 が成り立つと仮定すると $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}
D^{-(k+1)}\left[f\left(x\right)\right] &= \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x\int_a^{x_1}(x-t)^{k-1}f(t)\ dtdx_1 \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_a^{x_1}\int_t^x(x_1-t)^{k-1}f(t)dx_1dt \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x\frac{1}{k}(x-t)^kf(t)dt \\
&= \frac{1}{k!}\int_a^x(x-t)^kf\left(t\right)dt
\end{aligned}$$

より成り立ち、補題 1 が成り立つ。 □

補題 1 を使って (1) を計算すると、

$$D^{-n}\left[f\left(x\right)\right] = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)\ dt \tag{2}$$

となります。ここで、n を一般の複素数 s に変換すると... $(s-1)!$　とはどういうことでしょうか？（自然数でない階乗）ここで階乗の概念の拡張であるガンマ関数（$\Gamma(x)$）を導入します。

定義 2　ガンマ関数とは

$$\Gamma\left(x\right) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, x>0 \tag{3}$$

で定義される関数です。

右辺の積分を部分積分して、

$$\Gamma\left(x\right) = \left[-t^{x-1}e^{-t}\right]_0^\infty + (x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}dt$$

1 項目は 0 に収束するので

$$\Gamma\left(x\right) = (x-1)\,\Gamma\left(x-1\right) \tag{4}$$

と表せます。これは x を自然数とすると $\Gamma\left(x\right)=(x-1)!$ となることを示しています。また、$\Gamma\left(1\right)=1$ なのでガンマ関数は階乗の概念を拡張した関数と言えるでしょう。ですが (3) は $x>0$ でしか定義されていません。なので、一般の複素数全体まで変数を拡張しましょう。

補題 3

$$\Gamma\left(z\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^zn!}{\prod_{k=0}^n\left(z+k\right)}$$

証明 2

$$G_n(z) = \int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

$$\lim_{n\to\infty}G_n(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

である。
$t = nu$ と置換して、

$$G_n(z) = n^z \int_0^1 u^{z-1} (1-u)^n \, du$$

$$g_n(z) = \int_0^1 u^{z-1} (1-u)^n \, du$$

とすると、

$$g_0(z) = \int_0^1 u^{z-1} du = \frac{1}{z}$$

$$\begin{aligned} g_n(z) &= \int_0^1 u^{z-1} (1-u)^n \, du \\ &= \frac{n}{z} \int_0^1 u^z (1-u)^{n-1} \, du \\ &= \frac{n}{z} g_{n-1}(z+1) \end{aligned}$$

よって

$$G_n(z) = \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n} (z+k)}$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} G_n(z) &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n} (z+k)} \end{aligned}$$

□

これによって複素数の階乗を定義できました。また、負の整数でガンマ関数は発散します。
ついでに証明は最後の章で行いますが今後使う等式を下に示します。

定理 4 $n \in \mathbb{N}$ のとき

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \tag{5}$$

が成り立つ。
では (2) の n を複素数 $s(\Re(s) > 0)$ に置き換えると、

$$D^{-s}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_a^x (x-t)^{s-1} f(t) \, dt \, , s > 0 \tag{6}$$

となります。これを関数 $f(x)$ の $s(\in \mathbb{C})$ 階積分と定義しましょう。
ここでこの定義が満たしておいてほしいいくつかの性質は

定理 5

$$D^{-t}\left[D^{-s}[f(x)]\right] = D^{-s-t}[f(x)] \tag{7}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} D^{-\epsilon}[f(x)] = f(x) \tag{8}$$

$$D^{-s}[f(x)+g(x)] = D^{-s}[f(x)] + D^{-s}[g(x)] \tag{9}$$

です。ただし、(8) において $f(x)$ は微分可能とします。

証明 3　(7) について
ここでベータ関数 $(B(x,y))$ を導入します。

定義 6

$$B\left(x,y\right) = \int_0^1 \left(1-t\right)^{x-1} t^{y-1} dt \tag{10}$$

補題 7　任意の x, y に対して次の等式が成り立つ。

$$B\left(x,y\right) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{11}$$

証明 4　(3) の定義式において t を r^2 と置換すると

$$\Gamma\left(x\right) = 2\int_0^{\infty} r^{2x-1} e^{-r^2} dr$$

となる。
(12) の定義式において $t = \sin^2\theta$ と置換すると

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta$$

となる。

$$\begin{aligned}\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right) &= 2\int_0^{\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du 2\int_0^{\infty} v^{2y-1} e^{-v^2} dv \\ &= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(u^2+v^2\right)} u^{2x-1} v^{2y-1} du dv\end{aligned}$$

ここで、$u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$ と置換すると

$$\begin{aligned}\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} \left(r\cos\theta\right)^{2x-1} \left(r\sin\theta\right)^{2y-1} r dr d\theta \\ &= 4\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta \\ &= \Gamma\left(x+y\right) B\left(x,y\right)\end{aligned}$$

よって

$$B\left(x,y\right) = \frac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right)}{\Gamma\left(x+y\right)}$$

ここで複素数階の積分における指数法則は

$$\begin{aligned}D^{-t}[D^{-s}[f(x)]] &= \frac{1}{\Gamma(t)}\int_a^x (x-u)^{t-1} D^{-s}[f(u)] du \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(t\right)\Gamma\left(s\right)}\int_a^x f\left(v\right)\left(\int_v^x \left(x-u\right)^{t-1}\left(u-v\right)^{s-1} du\right) dv\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D^{-t}[D^{-s}[f(x)]] &= \frac{1}{\Gamma(t)\Gamma(s)}\int_a^x (x-v)^{s+t-1} f(v)\left(\int_0^1 (1-r)^{t-1} r^{s-1} dr\right) dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(t+s)}\int_a^x (x-v)^{s+t-1} f(v) dv \\
&= D^{-(t+s)}[f(x)]
\end{aligned}
$$

と証明される。

(8) について

$$
\begin{aligned}
D^{-\epsilon}[f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\epsilon)}\int_a^x (x-t)^{\epsilon-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\epsilon)}\left(\left[-\frac{(x-t)^{\epsilon}}{\epsilon} f(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{\epsilon}}{\epsilon} Df(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\epsilon+1)}\left((x-t)^{\epsilon} f(a) + \int_a^x (x-t)^{\epsilon} Df(t)dt\right)
\end{aligned}
$$

(部分積分をした) ここで $\epsilon \to 0$ とすると

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} D^{-\epsilon} &= f(a) + \int_a^x Df(t)dt \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

(微分積分学の基本定理より) となり、証明される。

(9) については (6) の定義より明らかであろう。 □

これで複素数階の積分が定義できました。

2.2 複素数階の微分

定義 8 $s = n - \alpha \; (n \in \mathbb{N}, 0 \le \Re(\alpha) < 1)$ とおいて,

$$
D^s[f(x)] = D^n[D^{-\alpha}[f(x)]] = D^n\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right] \tag{12}
$$

と定義します。

(12) の定義は以下の性質を満たす。

定理 9 *i)* $f(x) = C(C$ は定数) のとき $\alpha \neq 0$ で $a = 0$ のとき

$$
D^s[C] = C\frac{\alpha \ldots (\alpha - n - 1)}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha-n}
$$

$\alpha = 0$ で

$$
D^s[C] = 0
$$

ii)

$$
\lim_{s \to 0} D^s[f(x)] = f(x)
$$

iii)

$$
D^n[D^{-\alpha}[f(x)]] = D^{n-\alpha}[f(x)]
$$

iv)

$$
D^s[f(x) + g(x)] = D^s[f(x)] + D^s[g(x)]
$$

証明 5　$i)$ について、

$$
\begin{aligned}
D^s[C] &= D^n\left[\frac{C}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right]\\
&= D^n\left[\frac{Cx^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\\
&= \begin{cases} C\frac{\alpha\ldots(\alpha-n-1)}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha-n} & (\alpha\neq 0)\\ 0 & (\alpha=0)\end{cases}
\end{aligned}
$$

$ii)$ について

(3) より直ちに導かれる. $iii)$ について $D[D^{-\alpha}[f(x)]]$ を考える。

$$
\begin{aligned}
D[D^{-\alpha}[f(x)]] &= \lim_{h\to 0}\frac{D^{-\alpha}[f(x+h)]-D^{-\alpha}[f(x)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int_a^x (x+h-t)^{\alpha-1}f(t)dt-\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right\}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left\{\frac{(x+h-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}}{h}\right\}f(t)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)dt\\
&= D^{1-\alpha}[f(x)]
\end{aligned}
$$

これを繰り返せば所望の式を得る。$iv)$ は定義から明らか。 □

定理 5 の $iii)$ は自然数階でない微分は定義 2 の $\Re(s)<0$ への拡張となっており、自然数階と複素数階の積分は指数法則を満たします。しかし、定理 6 により複素数階の微分は一般には指数法則を満たしません。

定理 10　$\alpha\in\mathbb{C},\Re(\alpha)>n$ のとき

$$
D^{-\alpha}D^n[f(x)] = D^nD^{-\alpha}[f(x)]-\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^{\alpha-k}f^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha+1-k)} \tag{13}
$$

証明 6

$$
\begin{aligned}
D^{-\alpha}D^n[f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f^{(n)}(t)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[(x-t)^{\alpha-1}f^{(n-1)}(t)\Big]_a^x+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f^{(n-2)}(t)dt\\
&= -\frac{(x-a)^{\alpha-1}f^{(n-1)}(a)}{\Gamma(\alpha)}+D^{1-\alpha}D^{n-1}[f(x)]
\end{aligned}
$$

以下、部分積分を繰り返して (6) を得る。 □

定理 6 により複素数階の微分の指数法則は一般に成り立たないことが分かります。しかし、$f^{(n-k)}(a)$ が 0 になるような a を選べば指数法則を成り立たせることができる。

実際,x^z のようなべき関数であれば $a=0$ に選べばよく、e^x のような指数関数は $a=-\infty$ を選べば成り立ちます。

2.3 x^z の s 階微分

$a=0$ のとき

$$D^{-s}\left[x^z\right]=\frac{1}{\Gamma\left(s\right)}\int_0^x\left(x-t\right)^{s-1}t^z\ dt$$

$t=xt$ と置換して

$$D^{-s}\left[x^z\right]=\frac{x^{z+s}}{\Gamma\left(s\right)}\int_0^1\left(1-t\right)^{s-1}t^x\ dt$$

(12) を使って、

$$\begin{aligned}D^{-s}\left[x^z\right]&=\frac{x^{z+s}}{\Gamma\left(s\right)}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1+z)}{\Gamma(1+z+s)}\\&=x^{z+s}\frac{\Gamma\left(1+z\right)}{\Gamma(1+z+s)}\end{aligned}$$

よって $s>0$ では x^z の s 階積分、$s<0$ では x^z の s 階微分となっています。
$f(x)=x^2$ を 0.5 階微分しておきました。ところどころ (5) を使っています。

$$D^{\frac{1}{2}}\left[x^2\right]=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$$

さらにこれをもう 0.5 階微分すると、

$$D^{\frac{1}{2}}\left[\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\right]=2x$$

素晴らしい統一性です。残念ながら、e 階微分や π 階微分はガンマ関数での表示がないので（無限積などを使えば可能ですが）厳密には求まりません。
計算ソフトでの近似値で示すと x^2 の $\sqrt{\pi}$ 階微分は

$$D^{\sqrt{\pi}}\left[x^2\right]\simeq 2.195x^{2-\sqrt{\pi}}$$

となります。さらに x^2 の i 階微分は

$$D^i[x^2]\simeq(0.7079+0.9845i)x^{2-i}$$

となります。導関数をグラフにすると、下図のようになります。

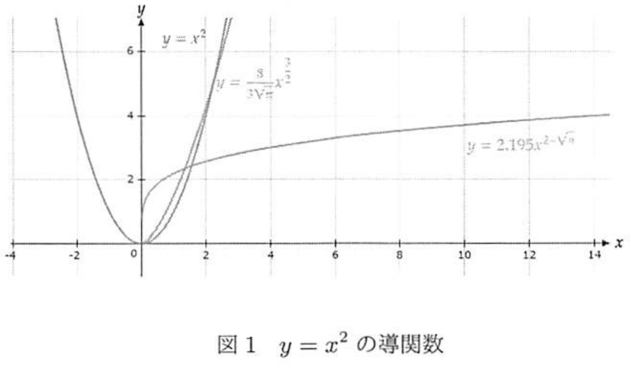


図 1　$y=x^2$ の導関数

3　初等関数の複素数階微積分

2 で複素数階微積分を（13）で定義しました。しかし $f(x)$ が指数関数や対数関数、特殊関数であるときその積分を計算するのは容易ではありません。
また、もう一つ問題点があり、それは可変的な積分区間の下限をどうするかです。(13) における $f(x)$ は可変な下限を持ってはいけません。実は三角関数に対する微積分は (13) での定義では不十分なのです。(べき級数展開などは話が変わります。)
しかし、２章でやった、関数の n 階積分を考えて n を複素数 s に変換する、という操作で種々の関数に対して複素数階微積分が定義できそうです。
以下では初等関数（べき関数、三角関数、指数関数とその逆関数）について考えましょう。また積分区間の下限を零点とします。
2 章の議論より複素数階の積分だけを定義すれば良いことになります。

3.1　定義

3.1.1　指数関数

一般に指数関数は定数倍を除いて

$$\alpha^{ax} \qquad (\alpha > 0, \alpha \neq 1)$$

と表せます。

定理 11　$n(\in \mathbb{N})$ 階積分は

$$\underbrace{\int_a^x \cdots \int_a^x}_{n} \alpha^{ax} dx \cdots dx = \left(\frac{1}{a \log \alpha}\right)^n \alpha^{ax}$$

証明 7　数学的帰納法による
$n = 1$ のとき

$$\int_a^x \alpha^{ax} dx = \frac{1}{a \log \alpha} \alpha^{ax}$$

であり $n = k$ のとき成り立つと仮定すると $n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned}\underbrace{\int_a^x \cdots \int_a^x}_{k+1} \alpha^{ax}\ dx \cdots dx &= \int_a^x \left(\frac{1}{a \log \alpha}\right)^k \alpha^{ax} dx \\ &= \left(\frac{1}{a \log \alpha}\right)^{k+1} \alpha^{ax}\end{aligned}$$

より従う。　□

定義 12　この時 n を実数 $s(\geq 0)$ に置き換えて指数関数の s 回積分を

$$D^{-s}\left[\alpha^{ax}\right] = \left(\frac{1}{a \log \alpha}\right)^s \alpha^{ax}$$

としましょう。

これは $\alpha = e$ のとき実は (13) の定義式からも導くことができます。このことは付録として最後の章につけておきます。

3.1.2 対数関数

定理 13 簡単のため、底を e とします。対数関数の $n(\in \mathbb{N})$ 階積分は

$$\underbrace{\int_a^x \cdots \int_a^x}_{n} \log x dx \cdots dx = \frac{x^n}{n!}\left(\log x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$$

と表せます。

証明 8 数学的帰納法による
$n = 1$ のとき

$$\int_a^x \log x dx = x(\log x - 1)$$

であり、$n = k$ のとき成り立つと仮定すると $n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned}\underbrace{\int_a^x \cdots \int_a^x}_{k+1} \log x dx \cdots dx &= \int_a^x \frac{x^k}{k!}\left(\log x - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\right) dx \\ &= \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\log x - \frac{1}{(k+1)!}\int_a^x x^k dx - \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\int_a^x \frac{x^k}{k!}dx \\ &= \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left(\log x - \sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}\right)\end{aligned}$$

より従う。 □

次に n を複素数 $s(\geq 0)$ に取り替える訳ですが、Σ をなんとかせねばなりません。
そこでディガンマ関数を導入します。

定義 14 ガンマ関数に対し、その対数微分

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

をディガンマ関数と定義する。

補題 15

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad (\gamma \text{ はオイラー定数})$$

オイラー定数は後で説明します。

証明 9 (4) より

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

の両辺を対数微分して

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$$

を得る。

$$\psi(x+1)+\cdots+\psi(x+n)$$

から

$$\psi(x+n)-\psi(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x-1}$$

である。ここで $x=1$ とすると

$$\psi(n+1)-\psi(1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

ここで $\psi(1)$ は

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}$$

を対数微分して

$$\psi(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\log n-\frac{1}{x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x}\right)$$

を得る。$x=1$ とすると

$$\psi(1)=\lim_{n\to\infty}\left(\log n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=-\gamma$$

実は、上の極限は $\gamma\simeq 0.57721$ に収束します。これをオイラー定数と呼びます。
よって補題 4 は証明された。そして和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\psi(n+1)+\gamma$$

と書き換えられる。 □

定義 16 よって、n を実数 $s(\geq 0)$ に置き換えて対数関数の s 階積分を

$$D^{-s}[\log x]=\frac{x^s}{\Gamma(s+1)}(\log x-\psi(s+1)-\gamma)$$

で定義します。

3.1.3 三角関数

まず簡単な $\sin x, \cos x$ から始めます。

定理 17 これらの関数の n 階積分は

$$D^{-n}[\sin x]=\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$D^{-n}[\cos x]=\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)$$

と表せます。

証明は省略します。
ここで曲者なのが $\tan x$ です。

定理 18 n 階積分は

$$D^{-n}[\tan x] = \left(-\frac{i}{2}\right)^{n-1} Li_n(-e^{2ix}) - \frac{(n-1)}{n!} ix^n + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\log\frac{1+e^{2ix}}{\cos x}\right)$$

と表せます。(i は虚数単位)

見慣れない記号 Li_n がありますね。これは多重対数関数と呼ばれる関数で

$$Li_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}$$

で定義されます。多重対数関数は以下の性質を満たします。

$$Li_1(x) = -\log(1-x) \qquad Li_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{Li_n(t)}{t} dt$$

証明はただただ長いだけなので読み飛ばしてもらっても構いません。

証明 10 数学的帰納法による
$n=1$ のとき

$$\int_a^x \tan x \ dx = -\log(\cos x)$$

であり、$n=k$ のとき成り立つと仮定すると $n=k+1$ のとき

$$D^{-k-1}[\tan x] = \int_a^x \left\{\left(-\frac{i}{2}\right)^{k-1} Li_k(-e^{2ix}) - \frac{(k-1)}{k!} ix^k + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\left(\log\frac{1+e^{2ix}}{\cos x}\right)\right\} dx$$

$i)$ 第 1 項目

$$\begin{aligned}
\int_a^x \left(-\frac{i}{2}\right)^{k-1} Li_k(-e^{2ix}) dx &= \int_a^x \left(-\frac{i}{2}\right)^{k-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-e^{2ix})^j}{j^k} dx \\
&= \left(-\frac{i}{2}\right)^{k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-e^{2ix})^j}{j^{k+1}} \\
&= \left(-\frac{i}{2}\right)^{k} Li_{k+1}\left(-e^{2ix}\right)
\end{aligned}$$

$ii)$ 第 2 項目

$$I_2 = \int_a^x \frac{(k-1)}{k!} ix^k dx = \frac{(k-1)}{(k+1)!} ix^{k+1}$$

$iii)$ 第 3 項目

$$I_3 = \int_a^x \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \log(1+e^{2ix}) dx$$

$e^{2ix} = t$ とおくと、

$$x = \frac{1}{2i}\log t, \quad dx = \frac{1}{2it} dt$$

$$I_3 = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{1}{2i}\right)^k \int_{e^{2ia}}^{e^{2ix}} \frac{(\log t)^{k-1}}{t} \log(1+t)dt$$

である。また、

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_a^x \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \log(\cos x)dx \\ &= \frac{x^k}{k!} \log(\cos x) + \frac{1}{k!} \int_a^x x^k \tan x \; dx \end{aligned}$$

$\tan x$ をオイラーの等式：$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて指数関数で表すと

$$\tan x = i - i\frac{2e^{2ix}}{1+e^{2ix}}$$

であるから

$$\frac{1}{k!}\int_a^x x^k \tan x \; dx = \frac{1}{k!}\left(\int_a^x ix^k dx - \int_a^x ix^k \frac{2e^{2ix}}{1+e^{2ix}}dx\right)$$

$e^{2ix} = t$ とおくと、

$$x = \frac{1}{2i}logt, \quad 2ie^{2ix}dx = dt$$

$$\frac{1}{k!}\left(\int_a^x ix^k dx - \int_a^x ix^k \frac{2e^{2ix}}{1+e^{2ix}}dx\right) = \frac{1}{(k+1)!}ix^{k+1} - \left(\frac{1}{2i}\right)^k \int_{e^{2ia}}^{e^{2ix}} \frac{(\log t)^k}{1+t}dt$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_{e^{2ia}}^{e^{2ix}} \frac{(\log t)^k}{1+t}dt &= (\log t)^k \log(t+1) - k\int_{e^{2ia}}^{e^{2ix}} \frac{(\log t)^{k-1}}{t} \log(1+t)dt \\ &= x^k \log(1+e^{2ix}) - k\int_{e^{2ia}}^{e^{2ix}} \frac{(\log t)^{k-1}}{t} \log(1+t)dt \end{aligned}$$

なので、$I_2 + I_3 + I_4$ は

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 + I_4 = &-\frac{(k-1)}{(k+1)!}ix^{k+1} + \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{1}{2i}\right)^k \int_{e^{2ia}}^{e^{2ix}} \frac{(\log t)^{k-1}}{t} \log(1+t)dt \\ &- \frac{x^k}{k!}\log(\cos x) - \frac{1}{(k+1)!}ix^{k+1} + \frac{x^k}{k!}\log\left(1+e^{2ix}\right) \\ &- \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{1}{2i}\right)^k \int_{e^{2ia}}^{e^{2ix}} \frac{(\log t)^{k-1}}{t} \log(1+t)dt \\ = &-\frac{k}{(k+1)!}ix^{k+1} + \frac{x^k}{k!}\left(\log\frac{1+e^{2ix}}{\cos x}\right) \end{aligned}$$

よって

$$D^{-n-1}[\tan x] = \left(-\frac{i}{2}\right)^n Li_{n+1}(-e^{2ix}) - \frac{n}{(n+1)!}ix^{n+1} + \frac{x^n}{n!}\left(\log\frac{1+e^{2ix}}{\cos x}\right)$$

となり従う。 □

定義 19　n を実数 $s(\geq 0)$ に置き換えて三角関数の s 階積分を

$$D^{-s}[\sin x] = \sin\left(x - \frac{s\pi}{2}\right)$$

$$D^{-s}[\cos x] = \cos\left(x - \frac{s\pi}{2}\right)$$

$$D^{-s}[\tan x] = \left(-\frac{i}{2}\right)^{s-1} Li_s(-e^{2ix}) - \frac{(s-1)}{\Gamma(s+1)} ix^n + \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}\left(\log\frac{1+e^{2ix}}{\cos x}\right)$$

と定義します。

3.1.4　その他の関数

初等関数にはまだ逆三角関数や双曲線関数がありますが、逆三角関数については n 階積分が求まらず、双曲線関数は指数関数に直すことができるので省略します。

4　ゼータ関数との関係

ゼータ関数とは、解析的整数論と呼ばれる分野において非常に重要な対象である関数です。

定義 20　ゼータ関数は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

で定義され、$\Re(s) > 1$ で絶対収束します。また $\Re(s) \leqq 1$ にも解析接続されます。

さて、e^{nx} という関数を考えましょう。

$$D^{-s}[e^{nx}] = n^{-s}e^{nx}$$

が成り立ちます。

$x = 0$ で連続な関数 $f(x)$ に対して、$\mathcal{H}[f(x)] = f(0)$ とすると、

$$\mathcal{H}[D^{-s}[e^{nx}]] = n^{-s}$$

和をとって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}[D^{-s}[e^{nx}]] = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s)$$

積分の形に戻して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-\infty}^{0} (-t)^{s-1} e^{nt} dt = \zeta(s)$$

$-t = t$ と置換すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{0}^{\infty} t^{s-1} e^{-nt} dt = \zeta(s)$$

一様収束なので積分と和を交換して、

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_{0}^{\infty} t^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} dt = \zeta(s)$$

$0 < e^{-t} < 1$ より、

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = \zeta(s)$$

左辺の積分を計算しましょう。

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{1}{e^{t}-1}dt$$

もう一度 $-t = t$ と置換すると

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-\infty}^0 (-t)^{s-1}\frac{1}{e^{-t}-1}dt$$

積分について、見てみると

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-\infty}^0 (-t)^{s-1}\frac{1}{e^{-t}-1}dt = \mathcal{H}\left[D^{-s}\left[\frac{1}{e^{-x}-1}\right]\right]$$

となっていますね。よって

$$\mathcal{H}\left[D^{-s}\left[\frac{1}{e^{-x}-1}\right]\right] = \zeta(s)$$

ここで、ベルヌーイ数を導入します。

ベルヌーイ数 B_n は関数のべき級数展開の係数と定義され、

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

を満たします。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left[D^{-s}\left[\frac{1}{e^{-x}-1}\right]\right] &= \mathcal{H}\left[D^{-s}\left[-\frac{1}{x}\frac{xe^x}{e^x-1}\right]\right] \\
&= \mathcal{H}\left[D^{-s}\left[-\frac{1}{x}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}x^n\right]\right] \\
&= \mathcal{H}\left[D^{-s}\left[-\frac{1}{x}\right]-D^{-s}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}x^n\right]\right] \\
&= \mathcal{H}\left[D^{-s}\left[-\frac{1}{x}\right]\right]+\mathcal{H}\left[D^{-s}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}x^n\right]\right]
\end{aligned}$$

ここで第一項目は

$$D^{-s}\left[-\frac{1}{x}\right] = -D^{-s+1}\left[\log x\right]$$

より、(12) を使って、

$$D^{-s}\left[-\frac{1}{x}\right] = -\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}\left(\log x - \psi(s) - \gamma\right)$$

と表せる。$\mathcal{H}$ を作用させて、$s > 1$ のとき

$$\mathcal{H}\left[D^{-s}\left[-\frac{1}{x}\right]\right] = 0$$

実は次の章の (17) を用いればもっと簡単に求まります。
よって、

$$\mathcal{H}\left[D^{-s}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}x^n\right]\right]=\zeta(s)$$

ここで $s=-k\in\mathbb{N}$ とすると

$$\zeta(-k)=-\frac{B_{k+1}}{(k+1)}$$

が導かれ、不思議な等式 (解析接続での意味で)

$$\zeta(-1)=1+2+3+\cdots=-\frac{B_2}{2}=-\frac{1}{12}$$

も導かれます。しかし s が複素数のとき、$\zeta(s)$ は

$$f(x)=\frac{1}{e^{-x}-1}$$

を s 階積分して $\mathcal{H}$ を作用させた時の値となります。

5 $x=0$ における微分係数

これから関数を s 階微積分して $x=0$ を代入した値を求めていくのですがこの値のことを広義に $x=0$ における微分係数と呼ぶことにしましょう。
ここで、(13) の定義式の積分範囲の下限を $-\infty$ にします。
以下で考える関数は積分の下限を $-\infty$ にとれる関数とします。具体的には分数関数などです。
ただし、$f(x)$ から、指数関数だけは除きます。
複素数階微積分の定義式を

$$D^{-s}\left[f(x)\right]=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{s-1}f(t)\ dt$$

とします。この章では以下 2 つの定理を証明します。

定理 21 c_j^k を $f(x)$ の k 位の極、$-a_j$ を留数とする。$\Re(s)>0$ のとき

$$\mathcal{H}D^{s}\left[f(x)\right]=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\Bigg|_{c_j^k\neq 0}\left(c_j^k\right)^{s-k}a_j\Gamma(-s+k)$$

定理 22 $\Re(s)<0$ で

$$\zeta(s)=\Gamma(-s+1)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi i)^{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-2n\pi i)^{s-1}\right\}$$

複素数階微積分の定義式において $x=0$ とすると、

$$\mathcal{H}[D^{-s}\left[f(x)\right]]=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-\infty}^{0}(-t)^{s-1}f(t)\ dt \tag{14}$$

ここでメリン変換を導入します。

定義 23

$$\mathcal{M}[f(z)] = \int_0^\infty f(t)t^{z-1}dt$$

これがメリン変換の定義式です。(16) と少し形が似ていますね。
どうやら (16) をメリン変換で表せそうです
さらに重要なメリン変換とラプラス変換に関する関係式を導入します。

定義 24　ここでラプラス変換は

$$\mathcal{L}[f(z)] = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$

と定義されます。

定理 25

$$\mathcal{M}[f(s)] = \Gamma(s)\mathcal{M}[\mathcal{L}^{-1}[f(s)]]_{s\to 1-s}$$

証明 11

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[\mathcal{L}\left[f\left(s\right)\right]\right] &= \mathcal{M}\left[\int_0^\infty f\left(x\right)e^{-sx}dx\right] \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(y)e^{-xy}x^{s-1}dydx \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(y)e^{-xy}x^{s-1}dxdy
\end{aligned}$$

ここで $xy = t$ と置換すると

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty f(y)e^{-xy}x^{s-1}dxdy &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(y)e^{-t}\left(\frac{t}{y}\right)^{s-1}\frac{1}{y}dtdy \\
&= \int_0^\infty f\left(y\right)y^{-s}\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dtdy \\
&= \Gamma\left(s\right)\int_0^\infty f\left(y\right)y^{-s}dy \\
&= \Gamma(s)\mathcal{M}[f(s)]_{s\to 1-s}
\end{aligned}$$

ここで、$]_{s\to 1-s}$ とはメリン変換時に s を $1-s$ に置き換えるという意味です。
よって

$$\mathcal{M}\left[\mathcal{L}\left[f\left(s\right)\right]\right] = \Gamma(s)\mathcal{M}[f(s)]_{s\to 1-s}$$

逆ラプラス変換して（ラプラス変換の逆操作のこと）

$$\mathcal{M}[f(s)] = \Gamma(s)\mathcal{M}[\mathcal{L}^{-1}[f(s)]]_{s\to 1-s}$$

□

(16) は $-t=t$ と置換すると[*1]

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}[D^s[f(x)]] &= \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^\infty t^{s-1}f(-t)\ dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}\mathcal{M}\left[f(-s)\right]_{s\to -s} \\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}\Gamma(-s)\mathcal{M}[\mathcal{L}^{-1}[f(-s)]]_{s\to 1+s} \\
&= \mathcal{M}[\mathcal{L}^{-1}[f(-s)]]_{s\to 1+s}
\end{aligned}$$

これで実数階微分がメリン変換と逆ラプラス変換で表せました。
ここで逆ラプラス変換は次の複素積分で表されます。

$$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st}f(t)dt$$

ここで積分路 C は $f(x)$ の全ての極を含む閉曲線とします。これは留数を用いると計算が可能になります。

定義 26 領域 D の関数 $f(z)$ に対して $c \in D$ が孤立特異点であるとは十分小さい $r > 0$ をとって $0 < |z-c| < r$ で $f(z)$ が微分可能であることをいう。

定義 27 $f(z)$ が孤立特異点 $z=c$ でローラン展開（簡単にいうと関数を級数として展開したもの）をもち $1/(\ z-c)$ の係数 a_{-1} を c における留数といい、

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=c} f(z)$$

と表す。

定理 28 留数定理 $f(z)$ は単純閉曲線 C の内部に孤立特異点 $c_1 \cdots c_N$ を持つほかは C の内部と周をこめて微分可能とする。このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=c} f(z)$$

が成り立つ。

以上の内容は複素関数論の内容でかなり省略した説明だったので分からなかったかもしれませんが、留数とは関数固有の値であるというふうに思っておいてください。
(複素関数論を知っていた人にとっては正則を微分可能と言っていて違和感があったかもしれません。)
まだよくわかないと思うので、例をあげましょう
有理関数 $Q(z)/P(z)$ の分母 $P(z)$ の零点（$P(z)=0$ となる点）は孤立特異点です。
ローラン展開が

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{z^{-k}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z$$

の形の時、$z=0$ は $f(z)$ の k 位の極であるといい、特に 1 位の極を単純極と言います。
単純極の留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)$$

[*1] 数式中で $s \to 1-s$ が $s \to -s$ で $s \to 1+s$ になっているのは一見間違いではないかと思うかもしれませんが、定義から計算するとこのようになります。

であり、k 位の極の留数は

$$\operatorname*{Res}_{\mathrm{z=c}} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-c)^k \left. f(z)\right|_{z=c}$$

と表せます。

例えば

$$f(z) = \frac{z^4}{z^2-iz+2} = \frac{z^4}{(z-2i)(z+i)}$$

の留数は

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{\mathrm{z=2i}} f(z) &= \lim_{z\to 2i}(z-2i)\,f\,(z)\\ &== \lim_{z\to 2i}\frac{z^4}{z+i} = -\frac{16i}{3}\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{\mathrm{z=-i}} f(z) &= \lim_{z\to -i}(z+i)\,f\,(z)\\ &= \lim_{z\to -i}\frac{z^4}{z-2i} = \frac{i}{3}\end{aligned}$$

です。

以下では関数を微分可能とします。

では逆ラプラス変換を留数で表しましょう。

$$\mathcal{L}^{-1}[f(-s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{sx}f(-x)dx$$

ここで、$f(-x)$ の極を順に $-c_j(1\leq j\leq N)$ とおき、$k(1\leq k\leq m)$ 位の極を $-c_j^k$ とおいて a_j を $-c_j$ の留数とすると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{sx}f(-x)dx = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}a_j s^{k-1}e^{-c_j^k s}$$

と表せる。ただし、$\Re(c_j^k)\geq 0$ とします[*2]。

たいして何も変わっていないように思われますが、この操作が後に重要になってきます。

メリン変換をして

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\mathcal{L}^{-1}[f(-s)]]_{s\to 1+s} &= \mathcal{M}\left[\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}a_j s^{k-1}e^{-c_j^k s}\right]_{s\to 1-s}\\ &= \left[\int_0^\infty \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}a_j t^{k-1}e^{-c_j^k t}t^{s-1}dt\right]_{s\to 1+s}\\ &= \left[\int_0^\infty \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}a_j e^{-c_j^k t}t^{s+k-2}dt\right]_{s\to 1+s}\\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}a_j e^{-c_j^k t}t^{s+k-1}dt\end{aligned}$$

[*2] $\Re(c_j^k)<0$ でも $x=0$ における微分係数が存在するのですが、後々の操作で発散してしまうので今回は条件から除きました。何とかできそうな雰囲気はあるのですが…。

ここで $c_j^k=0$ のときの j に対しては定数のメリン変換となるので 0 となります。よってその j を除いて

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\Bigg|_{c_j^k\neq 0} a_j s^{k-1}e^{-c_j^k s}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}a_j s^{k-1}e^{-c_j^k s}\ (c_j^k=0 \text{ となる } j \text{ は除く})$$

とする。$c_j^k=u$ とおき、積分路を $L=\{c_j^k t, t>0\}$ とすると

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\mathcal{L}^{-1}[f(-s)]]_{s\to 1+s}&=\int_L \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\Bigg|_{c_j^k\neq 0} a_j(c_j^k)^{-s-k}e^{-u}u^{s+k-1}du\\&=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\Bigg|_{c_j^k\neq 0} a_j(c_j^k)^{-s-k}\Gamma(s+k)\end{aligned}\tag{15}$$

さて $-c_j^k$ は $f(-x)$ により定まる数で a_j は $f(-x)$ の留数です。さらに、c_j^k は $f(x)$ により定まり $-a_j$ は $f(x)$ の留数です。つまり、$x=0$ における微分係数は微分可能な関数 $f(x)$ の留数計算により求まるということになります。これで s 階微分したときの $x=0$ における微分係数がガンマ関数と留数計算だけで表現できました。これは極が無限個の場合も同様に成り立ちます。試しに $f(x)=1/(1-x)$ とすると $x=0$ における微分係数は

$$\Gamma(s+1)\quad(\Re(s)>0)$$

となります。

では、4章の話に戻って、$\zeta(s)$ を求めてみましょう。

$$f(-x)=\frac{1}{e^x-1}$$

は単純極をもって、その極は n を整数として $x=2in\pi$ です。(i は虚数単位) このとき留数は 1 なので、(12) を用いて

$$\mathcal{F}\left[D^{-s}\left[\frac{1}{e^{-x}-1}\right]\right]=\Gamma(-s+1)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi i)^{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-2n\pi i)^{s-1}\right\}$$

となり、

$$\begin{aligned}\zeta(s)&=\Gamma(-s+1)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi i)^{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-2n\pi i)^{s-1}\right\}\\&=\Gamma(-s+1)\sum_{n\in\mathbb{Z}/\{0\}}(2n\pi i)^{s-1}\end{aligned}$$

と表される。

6　複素数階微分方程式

6.1　常微分方程式

微積分といえば、4,5 章で扱ったゼータ関数よりも微分方程式のイメージが強いでしょう。この章では複素数階微分方程式を解き、何か物理的な意味がないか探ります。

次のような微分方程式を考えましょう。

$$mD^2[x(t)] = -\mu D^\alpha[x(t)] \tag{16}$$

$\alpha = 0$ のとき、右辺は復元力となり解は単振動となることは有名でしょう。この微分方程式は抵抗力を受ける質点の運動です。

ではここで、$x(t) = e^{\omega t}$ として解いていきます。解は

$$\omega = \begin{cases} 0 \\ (-\frac{\mu}{m})^{\frac{1}{2-\alpha}} \end{cases}$$

ここで ω は一般に複素数ですから

$$\omega_1 = \left(\frac{\mu}{m}\right)^{\frac{1+i\pi}{2-\alpha}} \ , \ \omega_2 = \left(\frac{\mu}{m}\right)^{\frac{1-i\pi}{2-\alpha}}$$

とするのが良いでしょう。よって

$$x(t) = C_0 + C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t} \tag{17}$$

となります。なんと任意定数が 3 個もあります。α が自然数のときは任意定数が 2 個というのは当たり前でしたが、α を実数にするだけで任意定数の数が増えました。本来であれば (18) には初期条件を 2 つ与えれば解が求まりますが、この場合は 3 つの初期条件が必要です。ここで次の 3 つの初期条件を与えましょう。

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = V_0 \\ \frac{d}{dt}v(t)|_{t=0} = -\frac{\mu}{m}v_0^\alpha \end{cases}$$

3 つ目の初期条件は独立でないかのように思われますが、こうすれば都合よくなるだけで本当は何でも良いです。積分定数を決定する連立方程式は次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & \omega_1^2 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ V_0 \\ -\frac{\mu}{m}v_0^\alpha \end{pmatrix}$$

これを解いて

$$\begin{cases} C_0 = x_0 - \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) v_o - \frac{\mu}{m}\frac{v_0^\alpha}{\omega_1\omega_2} \\ C_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{v_0}{\omega_1-\omega_2} + \frac{\mu}{m}\frac{v_0^\alpha}{\omega_2(\omega_1-\omega_2)} \\ C_2 = -\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{v_0}{\omega_1-\omega_2} - \frac{\mu}{m}\frac{v_0^\alpha}{\omega_1(\omega_1-\omega_2)} \end{cases}$$

ここで表記を見やすくするため

$$k = \left(\frac{\mu}{m}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}} \ , \ \delta = \frac{\pi}{2-\alpha}$$

とおきます。

上の連立方程式の解を直接代入して整理するのは大変そうです。いくつか準備をしましょう。

$$\overline{\omega_2} = \omega_1 \ , \ \overline{C_2} = C_1$$

$$\begin{aligned} \omega_1\omega_2 &= k^2 \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} &= e^{2i\delta} \\ \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} &= \frac{2\cos\delta}{k} \\ \omega_1 - \omega_2 &= 2ik\sin\delta \end{aligned}$$

これらを使って、

$$\begin{cases} C_0 = x_0 - \frac{2\cos\delta}{k}v_0 - \frac{\mu}{m}\frac{v_0^\alpha}{k^2} \\ C_1 = -\frac{i}{2k\sin\delta}\left(e^{2i\delta}v_0 + e^{i\delta}\frac{\mu}{m}\frac{v^\alpha}{k}\right) \\ C_2 = \frac{i}{2k\sin\delta}\left(e^{-2i\delta}v_0 + e^{-i\delta}\frac{\mu}{m}\frac{v^\alpha}{k}\right) \end{cases}$$

(19) に代入して微分方程式の解は

$$x(t) = x_0 - \frac{2\cos\delta}{k}v_0 - \frac{\mu}{m}\frac{v_0^\alpha}{k^2} + \frac{e^{kt\cos\delta}}{k\sin\delta}\left\{v_0\sin(2\delta - kt\sin\delta) + \frac{\mu}{m}\frac{v_0^\alpha}{k}\sin(\delta - kt\sin\delta)\right\} \tag{18}$$

となります。お世辞にもきれいな形とは言えないですね。次を用いるとスッキリします。

$$\eta(t) = \frac{e^{kt\cos\delta}}{k\sin\delta}\left\{v_0\sin(2\delta - kt\sin\delta) + \frac{\mu}{m}\frac{v_0^\alpha}{k}\sin(\delta - kt\sin\delta)\right\}$$

とすると、(20) は

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - \frac{1}{k\sin\delta}\left(v_0\sin 2\delta + \frac{\mu}{m}\frac{v_0^\alpha}{k}\sin\delta\right) + \eta(t) \\ &= x_0 + \eta(t) - \eta(0) \end{aligned}$$

となります。少し特殊値を代入してみましょう。$v_0^\alpha = 0$ としておきます。(加速度の初期条件が 0 なのは自然でしょう。)

$\alpha = 0$ を代入すると

$$\lim_{\alpha\to 0} x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}\sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{m}}t\right)$$

単振動の解が得られます。ここで α が自然数のとき代入する方法と直接微分方程式を解く方法とでは定数倍の違いが出ます。それは初加速度を 0 に設定したからで、本質的には同じものと考えれるでしょう。

下図は時間 t を x 軸に、位置 x を y 軸にとって $x_0 = 0, v_0 = 1, k = 1, v_0^\alpha = 0, \sqrt{\frac{\mu}{m}} = 1$ とした各 α に対するグラフです。

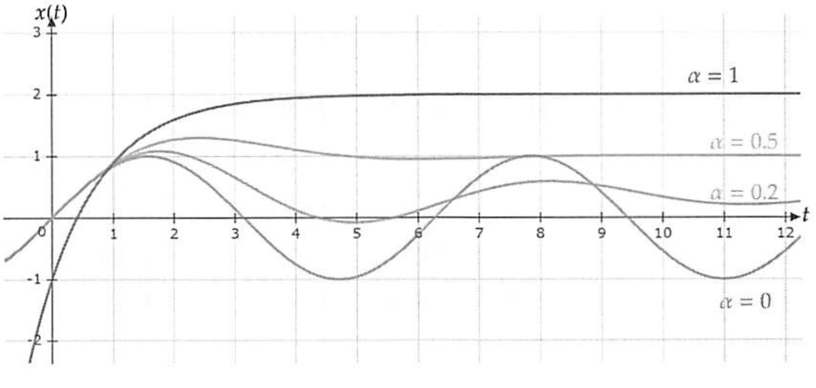


図 2　各 α に対する微分方程式の解

ではこの解や微分方程式はどのような意味を持つのでしょう。

次のような微分方程式を考えましょう。

$$mD^2[x(t)] = -\kappa x - \gamma D[x(t)]$$

κ はバネ定数など、γ は一次の抵抗係数です。
$x(t) = e^{\Omega t}$ として解くと

$$\Omega = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{\kappa}{m}}$$

となります。

$$\Omega_1 = -\frac{\gamma}{2m} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{\kappa}{m}}\ ,\ \Omega_2 = -\frac{\gamma}{2m} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{\kappa}{m}}$$

としておきましょう。ここで $\Omega_1 = \omega_1$, $\Omega_2 = \omega_2$ として比較すると

$$\frac{\gamma}{m} = -2\left(\frac{\mu}{m}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}} \cos\left(\frac{\pi}{2-\alpha}\right)$$
$$\frac{\kappa}{m} = \left(\frac{\mu}{m}\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}$$

を得ます。μ を消去すると

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\kappa m}} = -2\cos\left(\frac{\pi}{2-\alpha}\right)$$

となります。これは m, κ, γ に対して α を選ぶことできるということです。つまり、実数階微分方程式は保存力と非保存力の 2 つを統一的に扱えるということになります。

6.2 偏微分方程式

それでは次に偏微分方程式を実数階微分を使って、無理やり解いてみましょう。
今回考える偏微分方程式は次の熱伝導方程式です。熱伝導方程式とは簡単には熱の伝わり方を表す偏微分方程式のことです。

$$\frac{\partial}{\partial t}W(x,t) = \kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t)$$
$$0 < x < 1\ ,\ 0 < \kappa\ ,\ W(0,t) = W(1,t) = 0 \tag{19}$$

$W(x,t)$ は位置 x, 時間 t における温度の関数です。とりあえず普通の解き方で解いてみましょう。

定理 29　解の一意性
一般に偏微分方程式を解くのはかなり難しいことです。ここで微分方程式の一般解が一つ求めれば、それが唯一の解であることを保証するなんとも都合のよい定理があります。(Cauchy-Kowalevski の存在定理)。しかし、この定理はかなり難易度が高いので今回は解の一意性を認めることにします。

原理 30　重ね合わせの原理 (線形性)
関数 $u_1(x,t), u_2(x,t)$ があるとする。a_1, a_2 を定数として

$$u(x,t) = a_1u_1(x,t) + a_2u_2(x,t)$$

は同時に

$$Du(x,t) = Da_1u_1(x,t) + a_2u_2(x,t) = a_1Du_1(x,t) + a_2Du_2(x,t)$$

を満たす。

6.2.1　普通に解く

$W(x,t) = f(x)g(t)$ と書けたとします (変数分離形)。偏微分方程式に代入して

$$f(x)\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \kappa g(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)$$

両辺を $\kappa f(x)g(t)$ で割って

$$\frac{1}{\kappa g(t)}\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)$$

が得られる。左辺は t だけの関数で右辺は x だけの関数です。よってこの値は定数 μ になるはずでしょう。

$$\frac{1}{\kappa g(t)}\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x) = \mu$$

こうして整理すると 2 つの常微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \kappa\mu g(t) \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x) = \mu f(x) \tag{21}$$

(23) から解いていきましょう。$f(x) = e^{ax}$ とします。
すると、$a^2 = \mu$ が得られます。
$i)\mu > 0$ のとき
$a = \pm\sqrt{\mu}$ となり、$f(x) = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$ となります。初期条件を代入すると

$$f(0) = A + B = 0\ ,\ f(1) = Ae^{\sqrt{\mu}} + Be^{-\sqrt{\mu}} = 0$$

となり、$A = B = 0$ と求められます。自明な解を求めても仕方がないので $\mu > 0$ は不適です。
$ii)\mu = 0$ のとき

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0$$

となり、$f(x) = Ax + B$ が一般解となります。初期条件を代入して

$$f(0) = B = 0\ ,\ f(1) = A + B = 0$$

より、$A = B = 0$。またしても自明な解が出てきました。
$iii)\mu < 0$ のとき

$$a = \pm i\sqrt{-\mu}$$

(i は虚数単位) です。よって一般解は

$$f(x) = Ae^{i\sqrt{-\mu}x} + Be^{-i\sqrt{-\mu}x}$$

オイラーの等式を使って、

$$e^{i\sqrt{-\mu}x} = \cos(\sqrt{-\mu}x) + i\sin(\sqrt{-\mu}x)$$
$$e^{-i\sqrt{-\mu}x} = \cos(\sqrt{-\mu}x) - i\sin(\sqrt{-\mu}x)$$

よって

$$f(x) = (A+B)\cos(\sqrt{-\mu}x) + i(A-B)\sin(\sqrt{-\mu}x)$$

初期条件を代入して

$$f(0) = A + B = 0$$

従って

$$f(x) = i(A-B)\sin(\sqrt{-\mu}x)$$

さらに

$$f(1) = 0 \leftrightarrow i(A-B)\sin(\sqrt{-\mu}) = 0$$

$i(A-B) = 0$ では自明な解になるので $i(A-B)\sin(\sqrt{-\mu}) = 0$。よって

$$\sqrt{-\mu} = n\pi \ \ (n = 1, 2, 3 \dots)$$

すなわち

$$f(x) = i(A-B)\sin(n\pi x)$$

となります。(22) を解きましょう。$\mu = -n^2\pi^2$ を代入して

$$\frac{d}{dt}g(t) = -\kappa n^2\pi^2 g(t)$$

$g(t) = e^{bt}$ として解いていきます。

$$b = -\kappa n^2\pi^2$$

よって

$$g(t) = De^{-\kappa n^2\pi^2 t}$$

以上から

$$W(x,t) = i(A-B)De^{-\kappa n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$$

ここで、$i(A-B)D = C$ とおく。さらに $W(x,t)$ を各 n について足し合わせたものが一般解になります。
よって

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\kappa n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$$

が一般解です。

6.2.2 実数階微分を使って解く

(21) を無理やり因数分解すると

$$\left(\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}} - i\sqrt{-\kappa}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}} + i\sqrt{-\kappa}\frac{\partial}{\partial x}\right)W(x,t) = 0$$

すなわち、

$$\left(\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}} \pm i\sqrt{-\kappa}\frac{\partial}{\partial x}\right)W(x,t) = 0$$

となります。上と同様に $W(x,t)=f(x)g(t)$ として解いていきます。代入して

$$f(x)\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}}g(t)\pm ig(t)\sqrt{-\kappa}\frac{\partial}{\partial x}f(x)=0$$

変形して

$$\frac{1}{g(t)}\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}}g(t)=\pm i\frac{\sqrt{-\kappa}}{f(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x)$$

この値は定数 λ になるはずです。よって、

$$\frac{1}{g(t)}\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}}g(t)=\lambda \tag{22}$$

$$\pm i\frac{\sqrt{-\kappa}}{f(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x)=\lambda \tag{23}$$

また常微分方程式？ になりました。(25) から解いていきます。

$$(25)\leftrightarrow\frac{d}{dx}f(x)=\pm i\frac{\lambda}{\sqrt{-\kappa}}f(x)$$

$f(x)=e^{ax}$ とすると、$a=\pm i\frac{\lambda}{\sqrt{-\kappa}}$ となり、(25) の一般解は A,B を定数として、

$$f(x)=(A+B)\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{-\kappa}}x\right)+i(A-B)\sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{-\kappa}}x\right)$$

(6.21 と同じことをしています。) 初期条件から $(f(0)=0)A+B=0$ が分かる。また $f(1)=1$ から

$$i(A-B)\sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{-\kappa}}\right)=0\leftrightarrow\frac{\lambda}{\sqrt{-\kappa}}=n\pi\quad(n=1,2,3\dots)$$

よって、

$$f(x)=i(A-B)\sin(n\pi x)$$

$\lambda=\sqrt{-\kappa}n\pi$ を (24) に代入して

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}g(t)=\sqrt{-\kappa}n\pi g(t)$$

$g(t)=e^{bt}$ として解いていきます。代入して

$$b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-\kappa}n\pi$$

を得る。つまり、

$$b=-\kappa n^2\pi^2$$

よって一般解は D を定数として

$$g(t)=De^{-\kappa n^2\pi^2 t}$$

と書ける。従って、$C=i(A-B)D$ として

$$W(x,t)=Ce^{-\kappa n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$$

を得て、各 n について足して

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\kappa n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$$

となる。これは 6.21 の結果と一致しています。つまり、微分方程式を無理やり因数分解しても解けたことになります。わざわざ実数階微分を使うことのメッリトは場合分けをなくせるぐらいとしか筆者は気づけていませんが、6.1 の内容 (保存力と非保存力を統一的に扱える) を踏まえると複素数階微分方程式が豊かな構造を持っていることを予感させます。

7 複素数階微積分の解釈

自然数階の微分や積分には、接線の傾きや面積などといった幾何的な解釈が存在していました。ですが、複素数階微積分になったとき導関数や原始関数を図示したとき、何を表すかということは不明確です。ここでは複素数階微積分の幾何的な解釈の 1 つを与えましょう。この解釈は未だ不完全ですが、解釈できた範囲で述べていきます。

7.1 定義と諸定理

今までの定義における微積分はかなり限定的なものでした。もっと一般的な場合に応用できるように複素数階微積分に当たる演算を構成しましょう。

以降では複素数階微分演算子 D^s を無限次元線形作用素 $\mathcal{F}$ に作用する線形演算子としたい。このとき期待される性質は

1. $f(x)\in\mathcal{F}$ ならば $D^s f(x)\in\mathcal{F}$
2. s が非負の整数に等しいとき $D^s f(x)$ は $f(x)$ の s 階導関数に等しい。
3. s が負の整数に等しいとき $D^s f(x)$ は $f(x)$ の s 階積分に等しい。
4. 指数法則 $D^s D^t = D^{s+t}$ が無条件に成立する。
5. $D^s f(x)$ は s について複素平面上に一意に解析接続できる。

である。

このような性質を満たすものはすぐに思いつくものではないでしょう。結論から言うと、フーリエ変換を用いることで可能になります*3。

定義 31 フーリエ変換

フーリエ変換は

$$\mathcal{F}[f(k)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx$$

で定義される。またフーリエ逆変換は

$$\mathcal{F}^{-1}[F(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{ikx}dk$$

で定義される。

そして複素数階微積分は次のように定義する。

*3 ただし、今までの定義と同値ではありません。

定義 32

$$D^s[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(ik)^s\mathcal{F}[f(x)]e^{ikx}dk = \mathcal{F}^{-1}[(ik)^s\mathcal{F}[f(x)]] \ \ s\in\mathbb{C}$$

この定義についていくつか説明をしよう。
$D[f(x)]$ のフーリエ変換を考えると、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[D[f(x)]] &= \int_{-\infty}^{\infty} Df(x)e^{-ikx}dx\\ &= \left[f(x)e^{-ikx}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ik)e^{-ikx}dx\\ &= ik\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx\\ &= ik\mathcal{F}[f(x)]\end{aligned}$$

ここで 2 行目の第 1 項が消えるのはフーリエ変換可能な関数に

条件 33　絶対積分可能

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$$

という条件がついているからです。[*4]。
同様にして

$$\mathcal{F}[D^n[f(x)]] = (ix)^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = (ik)^n\mathcal{F}[f(x)]$$

が成り立ちます。両辺をフーリエ逆変換して

$$D^n[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(ik)^n\mathcal{F}[f(x)]e^{ikx}dk$$

つまり、上の定義は $n(\in\mathbb{N})$ を $s(\in\mathbb{C})$ に拡張したものにまります。
上で挙げた満たしておいて欲しい 5 つ性質を満たしていることは分るでしょう。 4 の指数法則についてのみ証明します。

証明 12

$$\begin{aligned}D^t[D^sf(x)] &= D^t\left[\mathcal{F}^{-1}[(ik)^s\mathcal{F}[f(x)]]\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(ik)^t\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[(ik)^s\mathcal{F}[f(x)]]\right]e^{ikx}dk\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(ik)^{t+s}\mathcal{F}[f(x)]e^{ikx}dk\\ &= D^{s+t}[f(x)]\end{aligned}$$

□

さらにこの定義はいい性質を持っていて、

定理 34

$$D^s[C] = 0 \quad (s>0, C\text{ は定数})$$

[*4] フーリエ変換による微分の定義は理想的にも思えますが、指数関数などにはフーリエ変換が存在せず無力になってしまいます。

しかし、0 でない定数はフーリエ変換できないはずです。(絶対積分可能でない。) ですがこれをフーリエ変換可能にすることができるのです。
ここでディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ を導入します。
デルタ関数は

定義 35

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

を満たし

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

です。

変な関数ですね。このような類の関数は超関数と呼ばれています。上の定義を言い換えると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0)$$

となります。($f(x)$ は連続関数) イメージとしては $x = 0$ での $f(x)$ の値が拾われてくるみたいな感じでしょう。なのでわざわざ広義積分なんか使わなくても、積分区間に 0 を含んでいたらＯＫで、

$$\int_{a}^{b} f(x)\delta(x) dx = f(0) \ (a \leq 0 \leq b, a \neq b)$$

ついでに $\delta(0)$ となる点をずらすと、

$$\int_{a}^{b} f(x)\delta(x-c) dx = f(c) \ (a \leq 0 \leq b, a \neq b)$$

となります。
さらにたたみこみ積分を導入します。

定義 36　たたみこみ積分

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

これのフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) * f_2(t)] e^{-ikt} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-ikt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-ikt} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-ik(t-\tau)} dt \right] e^{-ikt} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-ik\tau} d\tau F_2(k) \\ &= F_1(k) F_2(k) \end{aligned}$$

となり、フーリエ変換の積に帰着される。

定理 37　デルタ関数のたたみこみ積分

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

これはたたみこみ積分とデルタ関数の定義から明らかであろう。

定理 38　デルタ関数のフーリエ変換

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

【証明】
定理 34 より

$$\mathcal{F}[f(t) * \delta(t)] = \mathcal{F}[f(t)]$$

また、たたみこみ積分のフーリエ変換から

$$\mathcal{F}[f(t) * \delta(t)] = \mathcal{F}[f(t)]\mathcal{F}[\delta(t)]$$

よって定理が従う。
つまり、定理 35 から絶対積分可能でない関数をデルタ関数とのたたみこみ積分で実現できることになります。
また、この逆変換を考えると、定数のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[1] = \sqrt{2\pi}\delta(k)$$

である。(線形性より定数は 1 とした。) よって、定数の微分は

$$\begin{aligned} D^s[\mathcal{F}^{-1}[\sqrt{2\pi}\delta(k)]] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(ik)^s\sqrt{2\pi}\delta(k)e^{ikx}dk \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、定理 31 は証明された。

定理 39　分配法則

$$D^s[f(x) + g(x)] = D^s[f(x)] + D^s[g(x)]$$

これは定義から明らかでしょう。

7.2　直交関数系

さて、ここから微分が無限次ベクトル空間における線形写像であり、実数階のとき無限次ベクトル空間における回転であると解釈できることを説明します。
無限次ベクトル空間というぐらいですから、基底があるはずです。何が基底になっているのでしょう？ それは、$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x \ldots\}$ です。ここで、1 つ疑問が生じます。関数をベクトルとしていいのか？ 答えは Yes です。高校まではベクトルとは矢印のことでしたが、ベクトルの公理 (線形空間の公理) を満たすものをベクトルと考えるのです。(線形空間というよりは完全直交関数系です。)

公理 40　線形空間の公理
1.$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$　(結合法則)
2.$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$　(交換法則)
3. どの元 $\boldsymbol{x}$ に対しても $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ となる元 $\boldsymbol{0}$ が存在する。　(零元の存在)

4. どの元 $\boldsymbol{x}$ に対しても $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}$ となる元 $\boldsymbol{x}'$ が存在する。　(逆元の存在)
5.$(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$ (右分配法則)
6.$a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$ (左分配法則)
7.$(ab)\boldsymbol{x}=a(b\boldsymbol{x})$ (結合法則)
8.$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$
ここで、a,b はスカラー

公理 37 を満たす集合 V を線形空間と呼びます。基底 $\{1,\cos x,\cos 2x,\dots,\sin x,\sin 2x\dots\}$ による集合 V は公理 37 を満たして線形空間となることがわかると思います。(今考えている集合 V は関数によって構成されている集合です。)
ここで、$\{1,\cos x,\cos 2x,\dots,\sin x,\sin 2x\dots\}$ のことを今まで基底としていましたが、基底にできるのでしょうか？
一般に、$(e_1,e_2,\dots)$ が基底であるとは次の 2 つの条件を満たさねばなりません。
1. 1 次独立である。
2. 生成系である。(線形空間 V に属する任意の元が一意に基底の線形結合で表せる。)
今回の基底では、1 の条件が怪しいですね。そもそも関数の 1 次独立とは何なのか？ (1 が成り立てば、2 が成り立つことは後で分かります。)

定義 41　直交関数区間 $[a,b]$ で定義された微分可能な 2 つの関数 $f(x),g(x)$ が

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$$

を満たすとき、関数 $f(x),g(x)$ は直交するという。

ここからは区間 $[a,b]$ を $[-\pi,\pi]$ とします。

定義 42　直交関数系ある関数列 (関数の集合)$\{\phi_0(t),\phi_1(t),\phi_2(t),\dots,\phi_n(t),\dots\}$ が存在し、任意の 2 つの関数が

$$\int_a^b \phi_i(t)\phi_j(t)dt=0 \ \ (i,j=0,1,2,\dots;i\neq j)$$

$$\int_a^b \phi_i(t)^2dt\neq 0 \ \ (i=0,1,2,)$$

となる関数列を直交関数系という。

ここでは関数の内積のようなものを定義しました。
実際、関数列 $\{1,\cos x,\cos 2x,\dots,\sin x,\sin 2x\dots\}$ は $m,n\in\mathbb{N}$ として

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x-\cos(m+n)xdx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi & (m=n)\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi & (m=n)\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$$

から直交関数系である。
さてここで直交関数系 $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t), \ldots\}$ を用いて、ある関数 $f(t)$ を構成したとします。
$f(t)$ は以下のようにあらわせるでしょう。

$$f(t) = a_0\phi_0(t) + a_1\phi_1(t) + \cdots + a_n\phi_n(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j\phi_j(t)$$

ここでは、まだ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ が一意なものであるとは限りません。このとき、$f(t) = 0$ とおいて、$\phi_j t$ と $f(t)$ との内積をとると、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_j t dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(t)\phi_j(t)dt \\ &= a_j\end{aligned}$$

$f(t) = 0$ よりすべての a_j について 0 しかとりえないことが分かります。つまり、直交関数系 $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t), \ldots\}$ は 1 次独立といえます。よって、直交関数系 $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t), \ldots\}$ は任意の関数をその線形結合で表せ、$\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t), \ldots\}$ を基底と呼べます。

7.3 複素数階微積分の解釈.1

さて、フーリエ変換は関数 $f(x)$ を基底 $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x \ldots\}$ で展開したものです。7.2 からその係数は一意であることが分かります。またここで $D^s[f(x)]$ は

$$D^s[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^s \mathcal{F}[f(x)] e^{ikx} dk$$

と定義されました。すなわち、微分とは無限時ベクトル空間に作用する線形写像であると考えれます。実際微分は線形写像の定義

定義 43　V と W を同じ F 上のベクトル空間とし、V から W への写像 f が任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ が任意のスカラー c に対し、

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ f(c\boldsymbol{x}) &= cf(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

を満たす f を線形写像という。

を満たしていることは分るでしょう。
どのような線形写像なのでしょうか。$(ik)^s$ のうち、k^s は変数なので i^s の部分を考えましょう。
複素平面上で考えると、i をかけることは $\pi/2$ 回転することに対応していました。そこで、関数 $f(x)$ を基底 $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x \ldots\}$ で展開した係数 a_n(フーリエ係数と呼びます) を複素平面上に対応させます。s 階微積分させると、フーリエ係数は $i^s a_n$ になる。$s \in \mathbb{R}$ のとき a_n は複素平面上で $\pi s/2$ 回転した点

に移る。しかし、$s \in \mathbb{C}$ のとき複素数 rad 回転させるとは全く直感的ではありません。$s = x + iy \ \ (x, y \in \mathbb{R})$ として、実部と虚部に分けていきましょう。

$$\begin{aligned}
i^s &= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^s \\
&= \cos\frac{\pi s}{2} + i\sin\frac{\pi s}{2} \\
&= \cos\frac{(x+iy)\pi}{2} + i\sin\frac{(x+iy)\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}xi - \frac{\pi}{2}y} + e^{-\frac{\pi}{2}xi + \frac{\pi}{2}y}\right) + i\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{\pi}{2}xi - \frac{\pi}{2}y} - e^{-\frac{\pi}{2}xi + \frac{\pi}{2}y}\right) \\
&= e^{\frac{\pi}{2}xi}e^{-\frac{\pi}{2}y} \\
&= i^x e^{-\frac{\pi}{2}y}
\end{aligned}$$

より、$x + iy$ 階微積分は $\frac{x\pi}{2}$ 回転、$e^{-\frac{\pi}{2}y}$ 倍の相似拡大で表されることになります。また、今までは実数でない微積分に対して、何が微分で何が積分なのか不明確でした (例えば、$1 + i$ 階の操作は微分なのか積分なのか)。$x \in \mathbb{R}$ 階では $x > 0$(反時計回りの回転) で微分、$x < 0$(時計回りの回転) で積分です。つまり、反時計回りの回転を微分、時計回りの回転を積分とし、相似拡大 (虚部) は回転に影響しないので、微分積分は実部によって与えられると考えます。しかし、ある x に対して、0 階の微積分と x 階微積分が一致する場合があります。このとき、無視した k^s の部分が階数の違いを特徴づけるはずですが、実際のどのような作用であるかに関して、まだ筆者は結果を得れていません。

7.4 複素数階微積分の解釈.2

こちらの解釈は前章のように回転という直感的な解釈とは異なりますが、1 つの強力な解釈になります。

$$D^{-s}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^x (x-t)^{s-1}f(t)dt = \int_0^{g_x^{(s)}(x)} f(t)\frac{d}{dt}g_x^{(s)}(t)dt$$

と変形する。ここで、$g_x^{(s)}(t)$ は

$$g_x^{(s)}(t) = \frac{1}{\Gamma(s+1)}\left\{x^s - (x-t)^s\right\}$$

と定義される。

幾何的な考察をするため、以下の準備をする。

1.(t, g, f) を座標にとって、領域 $[0, x]^3$ を考える。

2.(t, g) 平面上に曲線 $g_x(t)$ を描く。

3.(t, f) 平面上に曲線 $f(t)$ を描く。

4. 描いた曲線 $g_x(t)$ に沿って、高さ $f(t)$ の壁を描く。(すなわち、空間上に $g_x(t), f(t)$ によって作られる曲面を考える。)

この曲面を (t,f) 平面に射影し、$[0, x]$ で積分するとこれは通常の一階の積分になります。

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt$$

また、(g,f) 平面に空間上に描いた曲面を射影し、$[0,x]$ で定積分すると、s 階微積分による導関数*5となります。これが複素数階*6微積分の解釈です。

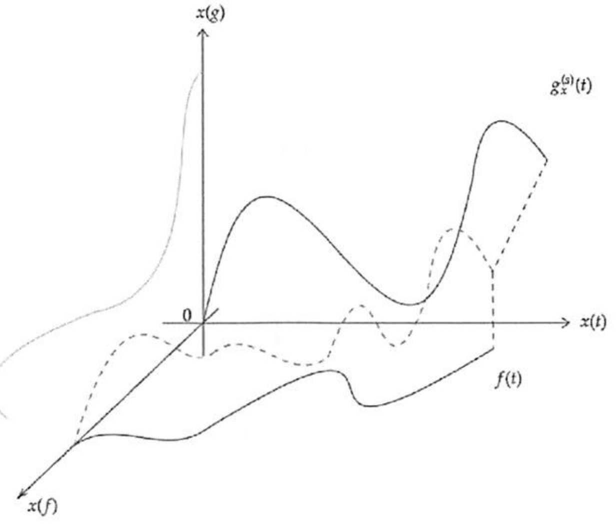


図 3　複素数階微積分の幾何的解釈

破線は空間上に描いた曲面の境界、緑の曲線は (g,f) 平面に射影した曲面です。(あくまでもイメージです。)
また、s について、g は滑らかなので、自然数階と複素数階の領域が滑らかに繋がっていることが分かります。
この幾何的な解釈は微積分の階数というよりもむしろ、積分に対する解釈というほうが強いでしょう。なので今までのことを総合すると、

微積分するとは複素平面上で回転、相似拡大することに

ある階数が決定されると、上記のように (f,g) 平面に射影した関数を $[0,x]$ で積分することである。

さらに、微積分の階数とは 6 章から保存力と非保存力を繋ぐ何かである。

ということが言えるでしょう。

8　おわりに

以上で行ったことは難解だったかもしれませんが、少しでも楽しんでいただけていたら幸いです。2 章で定義した複素数階の積分は Riemann-liouville 積分と呼ばれています。これは微分作用素の次数を解析接続していただけのことです。ですが、その操作によりゼータ関数を関数 $1/e^{-x}-1$ の s 階積分して $x=0$ としたときと同一視することができゼータ関数の表示を得ることができました。また、微分方程式への応用において、保存力と非保存力を統一的に扱える可能性を複素数階微積分は秘めていることが分かりました。
この複素数階微積分は実は歴史が深く、laibniz にまで遡ります。一方であまり発展せず、あまり日の目を見ることがなかったのも事実です。この理由には上でも見てきた通り、初等関数の微積分の域でも軽々と特殊関数が続々と登場する点や互いに同値でない定義がいくつもできてしまう点にあるでしょう*7。この実数階微積分は異常拡散モデルや非線形制御系で応用されているそうです。

---

*5 この導関数は導かれる関数の意で用いました。

*6 複素数になると明らかに平面が足りませんが、虚部に関して同様の考察ができるので、良しとしましょう。

*7 筆者の知る限りでは 5 つの定義があります。

9 補足

9.0.1 半整数の階乗,（5）

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

ここでガウス積分より

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

より

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

9.0.2 ガンマ関数を用いた (14) の導出

$\alpha^{ax}=e^x$ のときについて示す

$$D^{-s}\left[e^x\right]=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{s-1}e^x\ dt$$

$x-t=u$ とおいて

$$D^{-s}\left[e^x\right]=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{0}^{\infty}u^{s-1}e^{x-u}\ du$$
$$=\frac{e^x}{\Gamma(s)}\Gamma(s)$$
$$=e^x$$

より示された。

9.0.3 $f(x)=e^{nx}$ の $x=0$ における s 階微分係数

5章で関数の中から指数関数を除きました。その理由は3章で示した s 階微分の式に $x=0$ を代入したら求まるからです。ですがここではあえて5章で行った方法で求めてみましょう。
途中までは同じなのですが、逆ラプラス変換の所から操作異なってきます。$f(x)=e^{nx}(n>0)$ とします。$\delta(x)$ のラプラス変換は

$$\mathcal{L}[\delta(x-a)]=\int_{0}^{\infty}\delta(t-a)e^{-xt}dt$$
$$=e^{-ax}$$

となるので、e^{nx} の逆ラプラス変換は

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{nx}]=\delta(s-n)$$

$\delta(s-n)$ をメリン変換して

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}[\delta(s-n)]_{s\to 1-s} &= \left[\int_0^\infty \delta(t-n)x^{s-1}dt\right]_{s\to 1-s} \\
&= \int_0^\infty \delta(t-n)x^{-s}dt \\
&= n^{-s}
\end{aligned}
$$

よって３章での定義と合致します。

参考文献

[1] 杉本信正, 非整数階微分・積分とその応用, 日本流体力学会誌「ながれ」,Vol.4,No.2,pp.110 120(1985)

[2] 杉本信正, 非整数 1/2 階微分で与えられる履歴を伴う非線形波動, 京都大学数理解析研究所講究録 740,pp.1 26,(1991)

[3] 中西襄, 非整数階微分の新しい定義, 数学・物理通信,Vol.7,No.6,pp2-7,2017

[4] Udita N.Katugamapola,A New Fractional Derivative with Classical Properties,CoRR,2014

[5] Richard Herrmann,Fractional Calculus:An Introduction for Physicists,3rd edition,World scientific Pub Co Inc,2018

あとがき

いかがだったでしょうか。部誌の内容を全て理解することは難しいかもしれませんが、分からない部分があったとしても数学の美しさを感じていただけたなら部誌を作成した甲斐があります。

さて、突然ですが、ガロアという数学者をご存知でしょうか。彼は非常に不運で、自分の論文を他人に2度も紛失され、教師に才能を理解されず、父親には自殺され、採点者に高度な数学を理解されずに受験も落とされ、酷い目に遭い続けてきました。そんなとき、7月革命が起こり、これまでの不満をぶつけるように彼は革命運動へと傾倒していきました。そして紆余曲折あった後、決闘を受け、20歳という若さで死んでしまいました。この決闘までの間、彼は「ガロア理論」という、他の偉大な数学者たちには40年間も理解されなかった研究を走り書きしました。

"Je n'ai pas le temps."(私には時間がない)。これは、彼が「最期」の時をガロア理論に費やしたときに、走り書きの途中に残した言葉です。たった20歳で「ガロア理論」という素晴らしい業績を残していたのですから、長く生きていれば、さらに数学の発展に貢献していたと思います。幸い、私たちは革命もなく、決闘で殺されることも恐らくないであろう現代の日本にいます。私には、数学の発展に貢献するような研究はできませんが、数学の素晴らしさを伝える活動はできます。私には時間がたっぷりあるのだから、
"Je n'ai pas le temps."などと言い訳せず、数学を楽しみ、広めていきたいと思います。私はこれで引退ですが、これからも数学研究会の応援をよろしくお願いいたします。ありがとうございました。

リーダー 平野 浩太郎