SSH
KOBE.H.S.
MATH JOURNAL vol.5

表紙について

有名な数式や定義式等を用いて本校神戸高等学校の副校章であるおおとりを作成しました。

お気に入りの数式を探してみましょう。

使用した数式は以下の通りです。**(**一般的な名称と異なる場合があります。また順番に意味はありません。**)**

・ディリクレ積分 ・半整数の階乗 ・テータ関数 ・ゼータ関数の偶数値 ・ラマヌジャンの円周率公式 ・グリーンの公式 ・ドモアブルの定理 ・余接関数の部分分数分解 ・ストークスの定理 ・ガウス曲率 ・メリン変換とラプラス変換の関係式 ・オイラー定数 ・χ^2分布 ・ガンマ関数 ・フーリエ変換 ・外積 ・超幾何級数 ・ｔ分布 ・コーシーリーマンの関係式 ・スネデカーの **F** 分布 ・ケーリーハミルトンの定理 ・オイラーの公式 ・三角関数の極限 ・正規分布 ・テータ３重積 ・ゼータ関数のオイラー積 ・留数定理 ・ベクトルの内積外積 ・相加相乗平均 ・マクスウェル方程式 ・三平方の定理 ・ガウス積分 ・ガウスの発散定理 ・ゼータ関数 ・ディリクレ **L** 関数 ・チェビシェフの不等式 ・ローラン展開 ・e^x のマクローリン展開 ・リーマンの明示公式 ・ガウスボンネの定理 ・完備化されたゼータ関数 ・平方剰余の相互法則 ・ゼータ関数の積分表示 ・ポアンカレ計量

まえがき

こんにちは。本誌を手にとってくださりありがとうございます。兵庫県神戸高等学校数学研究会リーダーの眞鍋洋平です。数学研究会が復活してから（部員不足のため、1993 に休部になった）はや 4 年半が経ち、今回で 4 つ目の部誌になりました。新型コロナウイルスの影響もようやく落ち着いてきましたが、まだまだ弊害も多く、思うように活動できないこともありました。本誌は、そんな 1 年を通して我々７６回生と７７回生が面白いと思った研究や自作の問題を掲載した一冊となっているので最後まで読んで頂けたら幸いです。来年からも後輩たちがより一層活躍することを願っています。

目次

数学をなぜ学ぶのか

3 年　山端　優宏

皆さん、数学は好きですか？私は 2 年間数研に所属しておりましたが、兼部している陸上部に力を注いでいたので、あまり数学を深く学ぶといった高校生活は送ることができませんでした。数学の成績が格段に良いわけでもありません。なので、数学の点数が悪いこともあります。そんなときになぜ数学を学んでいるのだろう？と疑問に思うことがあります。確かにきれいな解法や自分になかった考え方を知ることによって、人生をより豊かにするでしょう。論理的な思考が身に付くでしょう。でもこのような回答に全ての人が頷けるでしょうか？数学を深く学んでいる人は分かるかもしれません。でも数学が嫌いな人もいるでしょう。私は数学の素晴らしさを全ての人に知って欲しい。だから数学がどのように世の中で役立っているのか、わたしたちの生活にどのような恩恵を与えているのか考えてみました。1 つ目は数値化することによって、事象を分析、評価できるようになりました。これは科学の世界だけではなく、様々な分野で役に立っています。例えばテストの点数。テストの点数によってすべての人が努力を平等に評価されることが可能になりました。商品に値段をつけ、売れ行きを見て価格を調整することによって、この商品は大体これくらいの価値があるという共通認識を売り手側と買い手側に与えました。もしお金といった数字による商品の評価がなければ、価値といった概念がないため、主観的な評価のみで取引がおこなわれ、円滑に経済活動を行うことは難しかったでしょう。ただし 1 つだけ注意点があります。それは数値化することによって捨てられてしまう情報も沢山あるということです。捨てられてしまう情報とは数値化するために捨てなければいけない情報、数値化することが難しい情報、人間が認識することが難しい情報があると思います。2 つ目はこれまでの観測記録をもとに規則性を見出して、未来を予測することが可能になりました。私達はシミュレーションによってさまざまなリスクを回避できるようになりました。もっともわかりやすいのは天気予報です。天気予報によって今後起こりうる自然災害を想定できるようになりました。さらに新型コロナウイルスの感染者数予測まで行いました。ただしここにも 1 つ注意点があります。それは 100%の未来予測はできないことです。なぜ 100%の未来予測ができないのか。それは 1 つ目の注意点に理由があります。すべての情報を計算に取り入れることはほぼ不可能だからです。バタフライ効果を知っていますか？バタフライ効果とは例えば北京で蝶が 1 回羽ばたくことによってアメリカのセントラルパークの天気が変わってしまうかもしれないという話です。つまり、小さな変化であったとしても将来的に大きな変化になってしまう可能性があります。残念ながら天気予報を行う際に蝶の羽ばたく回数を観測することはできません。これは極端な例かもしれませんが、この例から逆にできるだけ沢山の情報を計算に取り入れることによって予測の精度を向上させることができるようになることも分かると思います。

これまで、数学がどれほど素晴らしいものか述べました。では初めの問い「数学をなぜ学ぶのか」について答えましょう。私の回答は「人間が生存競争のなかで生き残るため」。

数学によって自然現象を分析することが可能になり、人間が自然現象を理解できるようになり、支配しようとするようになりました。そして、現在私達はこれから起きるであろう危険を予測しようとしています。火は人間以外の動物も扱えますが、高度な数学を扱えるのは人間のみです。ここに数学を学ぶ理由があるのではないでしょうか。
最後に、せっかく数研の記事なのだからもっと数学的な面白い内容がよかったという方もいるでしょう。しかし今回の私の記事のように数学をなぜ学ぶのか、どのように役に立つのかを考えることも重要です。現在、私達の想像以上に科学技術は発展してきています。これからは研究者がもっと一般の人々に自分の研究がどのように役に立つのか、実用性が分からなくても何がどのように面白いのかを説明することが重要になります。理由は税金によって研究が可能になっているということもありますが、間違った理解をしてしまい、科学技術が間違って使われることを避けるためです。だから今回の記事に注意点を載せました。この文章を読んでくださった方が将来研究者になったときに研究室に籠るのではなく、沢山の人に自分の研究を説明し、科学技術が人類の発展に貢献していることを切に願って文章を締めさせていただきます。

数の起源

尾崎翔将
神戸高校　総合理学科　３年　数学研究会

数の起源は、何千年もの間、人類が興味を抱いてきたテーマである。数の使用は、物の数え方から複雑な数学的計算の実行まで、人間社会の基本的な部分である。この論文では、数の歴史と、単純な数え方から今日の複雑な数学的体系への進化を探る。

1.　はじめに

数は、人類の文明にとって不可欠な要素である。距離の測定から時間の記録まで、生活のさまざまな場面で使われている。数の起源は、バビロニア人、エジプト人、インド人などの古代文明に遡ることができる。これらの文明は、指やつま先、小石など、さまざまなものをもとに、さまざまな数の数え方を発展させていった。

2.　本論

a.　バビロニアでの数

バビロニアは、最も早く番号付けシステムを開発した文明の一つです。バビロニアでは、60 という数字をベースに、時間、角度、距離の計測に使用された。バビロニア人は 10 の位と 60 の位を組み合わせて使用し、複雑な計算を可能にした。

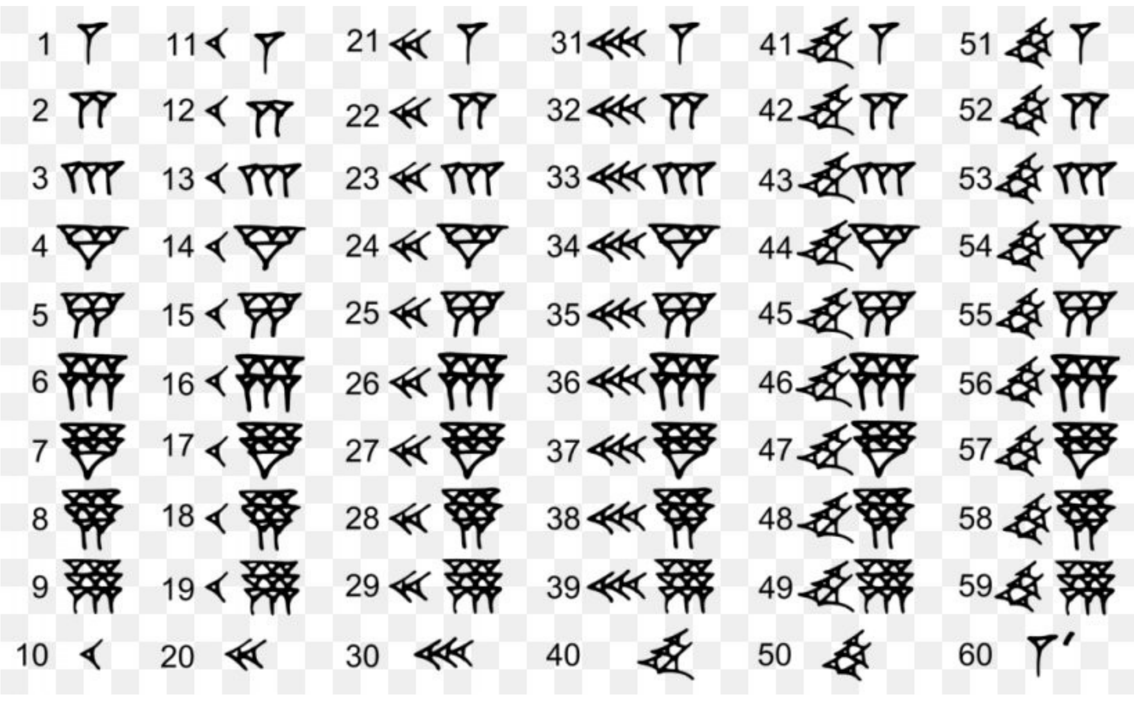


図 1　バビロニア数字　（https://favpng.com/png_view/mathematics-babylonian-numerals-numeral-system-number-maya-numerals-png/f9xPk9C1） b.　エジプトでの数

一方、エジプト人は象形文字に基づいた 10 の基数を使用していた。彼らは、数字を表す記号を使い分け、足し算、引き算、掛け算、割り算のシステムで計算を行った。インドでは、現在も使われている 10 進法をベースにした数体系が採用されていた。

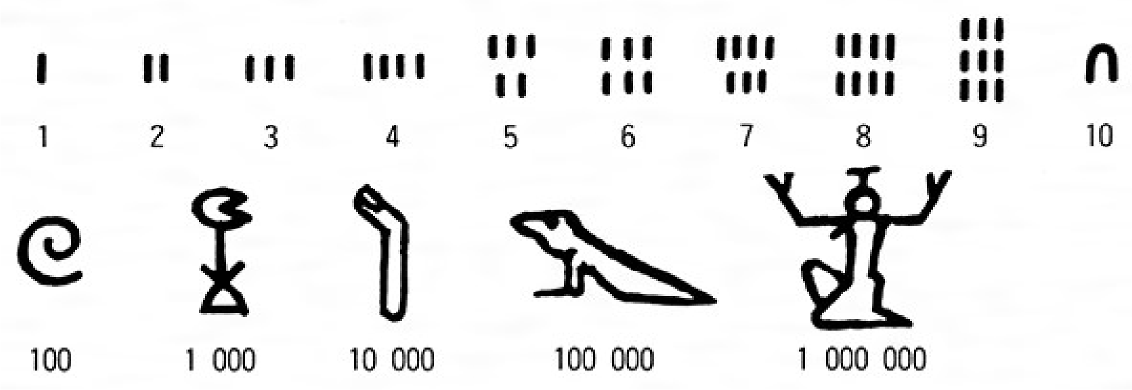


図 2　エジプトでの数　(数字(すうじ)とは？ 意味や使い方 - コトバンク (kotobank.jp))

c.　インドでの数

インドの数詞はブラーフミー文字に基づいており、0 から 9 までの数字が含まれていた。インドの数詞は、ペルシャの数学者アル・クワリズミー（Al-Khwarizmi）の研究によってイスラム世界に伝わった。アル・クワリズミーはアラビア数字を開発し、現在では世界中で使われている。

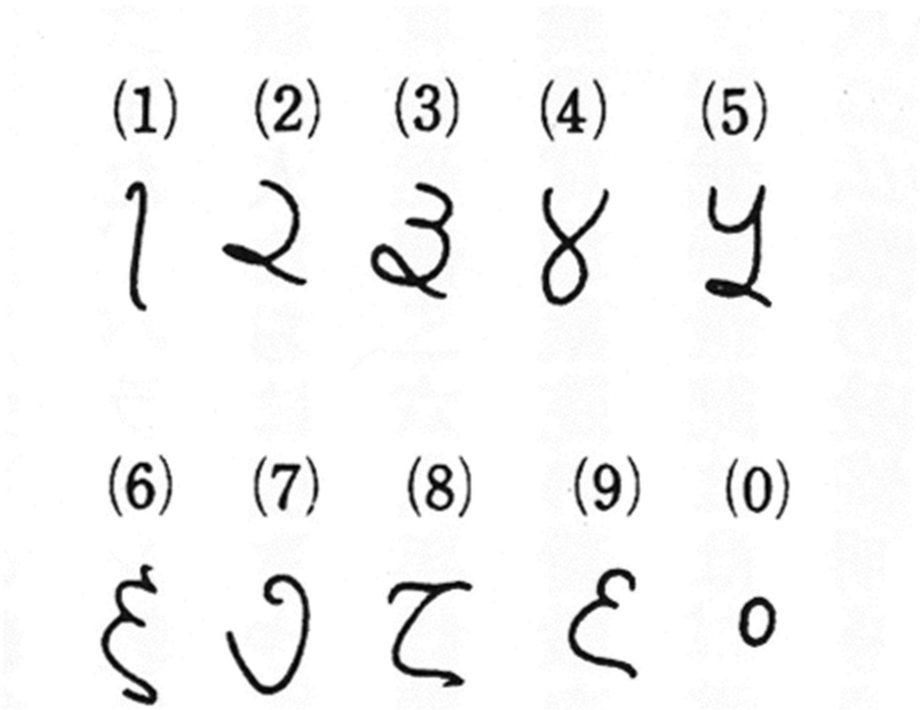


図 2　インドでの数　(https://www.st.hirosaki-u.ac.jp/~mathsci/m199806/num02.htm)

d. アラビアでの数

アラビア数字が開発され、ヨーロッパで採用されたことで、近代数学が発展することになった。アラビア数字とゼロの概念は、代数学と十進法の発達を可能にした。これらの概念は、微積分学やその他の数学体系の発展への道を開いた。

3. 結論

結論として、数の起源は古代文明までさかのぼることができる。これらの文明は、指やつま先、小石など様々なものを基にした、異なる数の体系を発展させた。アラビア数字とゼロの概念の開発は、代数学や微積分を含む近代数学の発展につながった。今日、数は人間社会に不可欠なものであり、私たちの生活のさまざまな場面で重要な役割を果たし続けている。

方程式$\sin x = 7$を満たすxを求めよ

3 年 9 組　石崎　朱

1.　はじめに

まず最初にこの題名を見て、“$-1 \leqq \sin x \leqq 1$…①となるはずなので方程式$\sin x = 7$を満たすxはないのではないか”と思った人が多いと思います。私も最初は全く同じことを思いました。

ここでもう一度、①が成立するxの条件について思い出してみましょう。この言い方をすると、みなさんの中にもうすうす感づいている人がいるのではないでしょうか。そう①が成立するのは「xが実数」の時なのです。たしかに、特に中学までの数学では、文字の定義に断りがない限りxが実数であることが暗黙の了解となることが多いですよね。そのため求めるxが実数かどうかをあまり注目しないことが多かったと思います。しかし実際には三角関数の定義域は複素数にまで拡張できるのです。そこで今回は三角関数の定義域を複素数にまで拡張することで、方程式$\sin x = 7$(※)を解いてみたいと思います。

2.　マクローリン展開について

“マクローリン展開？なんかよく分からない言葉が出てきたぞ”と思いませんでしたか？実際、マクローリン展開(より広義的に言えばテイラー展開)は大学の微分積分学で学ぶものだそうです。とは言いつつ実は赤チャート(旧課程ⅢP374)に載っていました。(笑)ですが！私も今回初めて学習しましたし、高校数学を用いて出来るだけ分かりやすく記述しようと思うので、構えることなく読んでもらえたらいいなと思います。

さて、オイラーの公式(詳しくは 3 で記述)を求めるにあたって必要となるマクローリン展開について、今回は高校数学を用いて軽く理解したいと思います。

※今回は方程式を解くことを主とするため、細かい定義などについては割愛させていただきます。もっと詳しく知りたい方は個別での探究をよろしくお願いします。

まずマクローリン展開とはテイラー展開の特別な場合についてを表します。テイラー展開について、ここでは成り立つ式だけを挙げておくことにします。

テイラー展開について

無限回微分可能な関数fについて、fがaの近くで

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$
$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!}+\cdots \quad \cdots②$$

とできるとき、これをfのaの周りのテイラー展開という。

また$a=0$の時でのテイラー展開を特別にマクローリン展開と言います。
マクローリン展開の式は②について$a=0$を代入して次のようになります。

マクローリン展開について

無限回微分可能な関数fについて、fが0の近くで

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\cdots \quad \cdots③$$

とできるとき、これをfのマクローリン展開という。

②③の式から、テイラー展開ないしはマクローリン展開が、関数fを多項式だと考えた上でその多項式を求めるものだということが分かると思います。ゆえにこれらは、複雑な関数だとしても、その関数を多項式で表すことが出来る考え方であるというわけです。

ここで式を提示されるだけだとあまりイメージが湧かないと思うので、今回は高校数学(数Ⅲ)で学ぶ微分法を使い、③が成立することを感覚的に理解したいと思います。

まず関数 $f(x)$ が多項式$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ の形であるとします。この時のa_kの値について考えてみましょう。ここで微分の出番です。
$f(x)$をk回微分することで、a_kの値は以下のように求まります。

$$a_0=f(0),\qquad a_1=f'(0),\qquad a_2=\frac{f''(0)}{2!},\qquad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

このことから$f(x)$ が多項式ならば、

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\cdots+\frac{f^{(n)}x^n}{n!}$$

と表せますね。したがって③が成り立つことも感覚的にわかると思います。

どうでしたか？なんとなく③が成立するイメージをしていただけましたでしょうか。
このマクローリン展開を用いることで次に説明するオイラーの公式が導かれ、今回の問題が解けるのです。というわけで明るい気持ちでオイラーの公式に進みましょう！

3.　オイラーの公式について

“なんだとまた知らない言葉が来てしまった…”(部誌ﾊﾟﾀｰﾝ)
ちょっと待ってください！もうすぐ方程式を解くのであと少しだけお付き合い下さい！

というわけでオイラーの公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad \cdots④$$

を証明したいと思います。

まず先程のマクローリン展開を用いると次の 3 式が成立することがわかります。

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad \cdots⑤$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \cdots⑥$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!} \qquad \cdots⑦$$

成立することの証明は以下のようになります。

(1) ⑤について

③の式における$f(x)$を$\sin x$とすると$f'(x)=\cos x$になりますよね。ここで$\cos 0=1$なので

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & (n = 2k) \\ (-1)^k & (n = 2k+1) \end{cases} \qquad (n\text{は}0\text{以上の整数})$$

になることがわかります。よって⑤は成立します。

(2) ⑥について

(1)同様$f(x)$を$\cos x$とすると$f'(x) = -\sin x$になり、$\sin 0 = 0$より、

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k & (n = 2k) \\ 0 & (n = 2k+1) \end{cases} \qquad (n\text{は}0\text{以上の整数})$$

になることが分かり、⑥は成立します。

(3) ⑦について

$f(x) = e^x$とすると、$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$となり、⑦が成立します。

こうして③に対する形式的な当てはめによりの３式が成立します。(詳しい正当化についてはここでは省略します。)

次に、これらの３式を等号で繋ぐことを考えます。⑤⑥の２式は形がかなり似ていることがわかりますが、⑦と比べるとこのままでは±が噛み合わない部分があるので虚数単位iを用います。

まずオイラーの公式の左辺について、⑦の式にixを代入すると

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

となります。

そして右辺についてはiを用いて、

$$\cos x + i\sin x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

となります。

以上からオイラーの公式と呼ばれる

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

という式が導かれます。

4. 方程式を解く

ここまで長々と難しいことが続きましたが、もうあとは解くのみです！

以上のことを用いて実際に(※)を解いてみることにしましょう。

④より

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} &= \cos(-x) + i\sin(-x) \\ &= \cos x - i\sin x \end{aligned}$$

となるので、

$$e^{ix} - e^{-ix} = (\cos x + i\sin x) - (\cos x - i\sin x) = 2i\sin x$$

これを$\sin\,x$について解くと

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

となります。これが7になるxを求めればよいので、両辺にe^{ix}をかけて

$$\frac{(e^{ix})^2 - 1}{2i} = 7e^{ix} \quad \Longleftrightarrow \quad (e^{ix})^2 - 14ie^{ix} - 1 = 0$$

e^{ix}をXとおくと、に関する二次方程式となるので、解の公式を用いて

$$X = 7i \pm \sqrt{(-7i)^2 + 1} = 7i \pm 4\sqrt{3}i = (7 \pm 4\sqrt{3})i$$

となります。ここで両辺自然対数を取ると

$$\log X = ix = \quad \log(7 \pm 4\sqrt{3}) + \log i \qquad \cdots⑧$$

しかしここで$\log i$が出てくるので、これについても④を利用して考えます。nを任意の整数として、

$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = i$$

となるので、

$$i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \log i$$

だと分かります。これを⑧に代入して、

$$ix = \log(7 \pm 4\sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

よって、(※)を満たすxは

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i\log(7 \pm 4\sqrt{3}) \qquad (nは任意の整数)$$

となるのです。

こうして一見解がないように思われる方程式について解を求めることが出来ました。

5. 最後に

まず、ここまで読んでくださり本当にありがとうございます。途中何度も心が挫けそうになった人もいると思います。(書いてる私もそうでした。)しかしこうして振り返ると、今までは数の世界をより狭い範囲で考えていたために解けなかった式も、数の世界を広げることで解くことが出来るのかと、代数学の奥深さに心惹かれます。今回は方程式を解くことが１番の目的だったため、解析学に含まれるテイラー展開などについて詳しくは割愛させて頂きましたが、気になる方はぜひ調べてみて欲しいと思います。長い間お付き合いいただき本当にありがとうございました！

6. 参考文献

http://indoctus2.blogspot.com/2015/03/sin-x2-x.html?m=1

https://mathlandscape.com/taylor-expansion/

https://atarimae.biz/archives/10492

なぜ五次方程式には代数的な解の公式が存在しないのか

兵庫県立神戸高等学校　数学研究会　７６回生　河原大智

五次方程式には代数的な解の公式が存在しない、というのは、高校数学の範囲内でもある程度知られている話です。しかし、なぜかと聞かれて答えられる人は少ないでしょう。本文ではその理由について説明していきたいと思います。暫しおつきあいください。

そもそも「方程式」とはなんでしょうか。ここで、皆さんの考える方程式を一つ例としてあげて説明したいと思います。簡単な話が続きますがご容赦ください。

$3x+2=8$

数の 2 に何かを足して 8 となるある数を 3 で割った数をxと記します。このことを数式として書き表したものが上記の数式となります。このxは「未知数」と呼ばれるもので、この $3x+2=8$なる未知数を求めること作業を、方程式を「解く」と言います。未知数を決めるための数式を方程式と言います。この方程式は

$$3x=8-2$$
$$3x=6$$
$$x=2$$

といった手順で解くことができます。このように、有限回の数学的操作で方程式の解法を見つける行為は「解法」と呼ばれます。一次方程式においては、未知数と定数をそれぞれ式内の逆の辺に集めて、未知数の係数を調整する、といった手順で解を求めることが可能です。

xを「ある数」であると仮定してその値を試しに方程式に代入し、数式として成立するかを調べるのは比較的容易な手順です。この方程式の解は$x=2$ ひとつであるため、運が良ければ数回の手順で解が分かるかもしれません。しかし、xの定義域内の試みの数はたいていの場合無限に存在するので、この類の手順は解法とは言えません。

また、方程式には当然解が存在しないものもあることを理解しておく必要があります。

$$3x=3x+2$$

$$0=3$$

後者の等式は成立しえず、元の方程式$3x=3x+2$のごとくはいかなるxに対しても成り立ちません。同じような話が、今後方程式の次数を増やしていった際につきまとうことなななります。

話を二次方程式に広げたいと思います。二次方程式とは、

$$x^2+x-6=0$$

のような、未知数の次数が 2 になったものです。この数式は因数分解によって

$$(x+3)(x-2)=0$$

となり、分解することで生じた因子と方程式右辺の数とどう対応するか考えることによって$x+3$、もしくは$x-2$のどちらかが 0 と等しくなる必要が出てきます。よって、

$$x=-3,2$$

と分かります。

また、平方完成によって解く解法もあります。こちらの方が二次方程式の解法としてはより一般的で、二次方程式の解の公式にもつながるものとなっております。

$$x^2+x-6=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2}$$

$$x=-3,2$$

という風に求められます。

他にも「逐次法」と呼ばれるもの等、二次方程式の解や解が実数解あるいは虚数解として何個存在するか、を求める方法は知られている方は多いでしょう。

一次方程式や二次方程式の場合には上記のような解法、そして解の公式が存在することが分かりますが、それでは三次方程式や四次方程式の場合はどうなるでしょうか。

結論から言えば、どちらにも解の公式が存在します。方程式の係数から代数的操作、つまり四則演算及びベキ根の有限回の操作のみを用いて解を導出することができるのです。前者はイタリア人数学者のニコロ・タルタリアが、後者はルドヴィコ・フェラーリが共に 16 世紀に発見しました。

彼らは任意の係数に対して三次方程式等の解を表現できるように「虚数」の概念を数の世界に初めて取り入れました。(特殊でなく一般的な三次方程式の解の公式の発見が遅れた理由として、複素数の範囲内で解を考えることが当時までなされていなかったことがあげられます) また、三次方程式には、代数学の基本定理によって高々三個の複素数の解が存在することが知られています。

ここで、主題の「なぜ五次方程式には代数的な解の公式が存在しないのか」という問題に立ち返りたいと思います。二次、三次、四次と、方程式の解を得る方法は発見されているのに、五次方程式だけ見つからないのは不思議に見えます。実際に、五次方程式が代数的操作によっては解けない、と判明する以前はシメオン・ポアソンやオーギュスタン・ルイ＝コーシー等、多くの数学者がこの問題に取り組んできました。そこに一体どういう絡繰があったのでしょうか。

五次方程式の秘密を理解するためには、五次方程式は他と何が本質的に違うのかを理解する必要があります。実際の証明には「ガロア群」という概念が登場しますが、これからの

説明はそれを噛み砕いたものと考えてください。

まずは二次方程式に戻ってみましょう。

二次方程式の二つの解をαとβとします。このとき二解の差を二乗したものを考えるとき、$(\alpha-\beta)^2$は元の二次方程式の係数から表すことができます。この量は、αとβの値を入れ替えても変わりません。

$$(\alpha-\beta)^2=(-(\alpha-\beta))^2=(\beta-\alpha)^2$$

これを置換に対して不変である、と言い、この「二つの解の差」を二乗したものを「対称式」と呼びます。

この式においてはαとβを入れ替えてもどっちがどっちか区別がつかないため個性がありません。しかしこの式の平方根をとると、$\alpha-\beta$と$\beta-\alpha$という、全体の符号が反転した二種類の解の差が得られます。この 2 量は対照ではありません。このことを使えば、四則演算とベキ根(今回の場合は平方根)で二次方程式の解を構成できることができます。対称式とそうでないもののすり合わせを行えばよいのです。

同じことが三次方程式での議論でも可能です。三次方程式の解として、α、βに加えγというものを考えます。このとき、二つの解の差は$(\alpha-\beta)$、$(\beta-\gamma)$、$(\gamma-\alpha)$と三通り存在します。その二乗を取ったとき、その量は対称式となります。この解の入れ替えの個数が三通りと十分に少ない値のため、偶然「三次方程式」は代数的に構成された解をもてたわけです。代数的な解を必ず作れたというのは、これらの方程式で対称でない解の入れ替えの種類の数が二次方程式では一個、三次方程式では三個と限られてちょうどよい値であったためだったのです。n次方程式の解は代数的に表せる、ということは必然ではなかったことがここから分かります。

ちなみに四次方程式の解については、フェラーリ等が見つけた手法によって三次方程式の解を探す問題に帰着できるため、三次方程式同様の説明が可能です。このことは、四次方程式の解の公式内に三次方程式の解の公式でみられた係数の組み合わせが確認されることからも分かると思います。

一方、五次方程式においては、五つある解の入れ替えの組み合わせが係数の数よりも多すぎて、代数的に解くことが不可能となるわけです。五次方程式がそれ以下の次数の方程式と何が本質的に違うか、というのはこういうことなのです。

数学者ガロアはこの入れ替えに関してガロア群という数学的概念に気付き、「四次方程式までのガロア群が満たす『可解』という条件を五次方程式に対するガロア群が満たさないこと」、そして五次方程式に代数的な解が存在しないことを彼の論文で証明したのでした。

しかしながら、この有名な話には続きがあります。五次方程式の解の公式について述べるとき、やたらと「代数的な」とことわってあった理由でもあるのですが、「代数的でない」

解法が存在するのです。楕円関数を用いたこの解法は、1858 年にフランスの数学者シャルル・エルミート等によって同時多発的に発見されました。

高校の数学で、三角関数の倍角公式を習います。三角関数の二乗を元の角度を二倍にした三角関数と結びつけるもので、加法定理により三倍角、四倍角、五倍角と拡張することができます。

このことをエルミートは用い、五次方程式に対する代数的でない解を見つけました。

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$$

三角関数$\sin x$の無限級数を用いた表示が上記の通りになるように、三角関数は代数的な関数ではなく、元の方程式の係数から有限回の操作では導出できません。無限回の代数的操作から導出されるエルミートの解は、有限回の代数的操作について述べているガロア理論には反しない、というわけです。

このような五次方程式の解法をめぐる話は大変興味深いものです。二つの未知数が何か判明させたければ、二つ以上の連立方程式(＝手段)が必要であるように、
ある方程式が解ける、解けないということを論じるとき、解を得るための手段がどう設定されているか、が数学を学ぶとき、そして五次方程式の解法について考えるときも大事になってきます(今回の場合は代数的な操作な限る、といった手段の制限がはっきりしていることが肝要でした)。

数学のルールやおもしろさについて本文で伝えることができたなら幸いです。

最後まで読んで頂きありがとうございました。

おしまい

包絡線

3-9　眞鍋　洋平

1.　はじめに

みなさんは包絡線というものをご存じでしょうか？ごくたまに大学入試にも出題されるのですが、例題として xy 平面上の関数

$$y = (2t+1)x - t^2 - t \cdots ① \qquad f(x,y,t) = (y - (2t+1)x + t^2 + t) = 0$$

についてこの関数の t を動かしていくときについて考えてみましょう。つまり、

$t = -4$ のとき $y = -7x - 12$

$t = -3$ のとき $y = -5x - 6$

$t = -2$ のとき $y = -3x - 2$

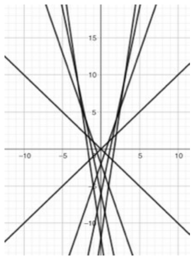
$t = -1$ のとき $y = -x$

$t = 0$ のとき $y = x$

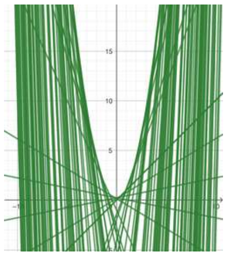
$t = 1$ のとき $y = 3x - 2$

$t = 2$ のとき $y = 5x - 6$

$t = 3$ のとき $y = 7x - 12$



<図 1>



<図 2>

これを xy 平面にプロットしていくと右図 1 のようになります。

さらに、t を全ての実数で動かすと図 2 のようになります。ほとんどの領域を関数が動いていますが、真ん中の所のみ関数が通っていないことがわかりますね。実は①のようにパラメーターを動かしていくと関数はある関数に接しながら（接点を持ちながら）動いていることが知られています。その関数を包絡線と呼びます。**包絡線の全ての点は、t によって動くなんらかの元の関数と接している、つまり接点の集合である**ことが知られています。この包絡線の方程式を以下の手順で求めてみましょう

$y = (2t+1)x - t^2 - t$・・・①の包絡線の求め方

i.　両辺をパラメーター t で微分する。　$0 = 2x - 2t - 1$　　$\therefore x = t + \dfrac{1}{2} \cdots ②$

ii.　①、②式を連立して t を t で表す　$y = t^2 + t + \dfrac{1}{2}$

iii.　パラメーターを消去する　$\boldsymbol{y = x^2 + \dfrac{1}{4}} \cdots ③$　$(g(x,y) = (x^2 - y) = 0)$

これで求まりました。実際③の方程式を微分すると $\frac{dy}{dx} = 2x$ ですから、この関数③上にある $(x,y) = (t + \frac{1}{2}, t^2 + t + \frac{1}{2})$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+t+\frac{1}{2})=2\left(t+\frac{1}{2}\right)\{x-\left(t+\frac{1}{2}\right)\}$$

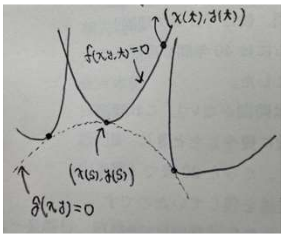
$$y=(2t+1)x-t^2-t$$

と求まります。ですから元の関数を $f(x,y,t)=0$ とおき、包絡線の関数を $g(x,y)=0$ と置いたとき包絡線の方程式 $g(x,y)=0$ は、

$$f(x,y,t)=0 \quad \text{かつ} \quad \frac{d}{dt}f(x,y,t)=0$$

つまり、t で微分した式と元の関数を連立すると接点の座標が出て、そこからパラメーターを消すことで包絡線が出てきます。（この表記の仕方は、正しくありません。形式的に書いています。）

これを聞いてみんなさんはどう思いますか？ t を一回微分したら、どうして都合良く接点の座標が出るのでしょう？僕もみた当初「は？」って思いました。証明するのは、大学の数学を用いるらしいのですが、今回は自分なりに高校で習う数学で納得できるように、もっというと微分の定義さえ知っていればわかるように、この手順で包絡線が求まることの証明をかなり工夫して記述してみました。長くなりますが少々お付き合いください。



イメージ図

2.　包絡線を求める上で重要なこと

今回は元の関数が一次関数でしたが、どの関数でも当てはまります。再度になりますが３変数関数 x,y,t で t によって x,y の方程式が変わる曲線群 E：$f(x,y,t)=0$ とし、この関数が 接しながら描く包絡線 F： $g(x,y)=0$ とします。

t がただ一つに決まると、関数 E もただ一つに決まるので、この関数上の座標を $\left(x(t),y(t)\right)$ と置きます。さらにこのときある点が包絡線と接するので、その点を $t=s$ とすると、**包絡線はこの点の集合なので、この $\left(x(s),y(s)\right)$ の関係式を求めることが最終目標です。**

もう一つ重要なことは、２つの曲線が接するということは、その点での**接線が一致すること**です。つまり、$g(x,y)=0$ の $\left(x(s),y(s)\right)$ における接線と、$f(x,y,t)=0$ の $\left(x(s),y(s)\right)$ における接線が一致します。後でこれを用いて証明するので覚えておいてください。

3.　証明

証明事項　E: $f(x,y,t)=0$ の包絡線 $g(x,y)=0$ 上の点 (x,y) は

$f(x,y,t)=0$ かつ $\dfrac{d}{dt}f(x,y,t)=0$ を満たす点の集合である。

（前者は自明なので後者を証明します。）

a. t で微分する。

上記の手順で記した通り、まずは E の関数の接点など細かいことを考えずにとりあえず t で微分していましたよね。E 上の点を $\big(x(t), y(t)\big)$ と定めましたので、当然 $f(x(t), y(t), t) = 0$ が成り立ちます。

これを両辺 t で微分します・・・がここで問題なのがその t が 3 箇所もあることです。

今までの知識として、例えば $y = f(x)$ で与えられる式を x で微分するときは

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で導関数を求めることができましたね。これと同様にして $f(x(t), y(t), t) = 0$ を t で微分するには

$$\text{（左辺）}\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x\,(t+h), y(t+h), t+h) - f(x(t), y(t), t)}{h}$$

となるはずです。3 次元を一緒に相手にするのは複雑なので以下のように式変形します。

$$\frac{f(x(t+h), y(t+h), t+h) - f(x(t), y(t), t)}{h} = \frac{f(x(t+h), y(t+h), t+h) - f(x(t), y(t+h), t+h)}{h}$$

$$+\ \frac{f(x(t), y(t+h), t+h) - f(x(t), y(t), t+h)}{h} + \frac{f(x(t), y(t), t+h) - f(x(t), y(t), t)}{h}$$

$(x(t), y(t), t)$ を 1 箇所ずつ微分するために 1 箇所ずつ強引に残して調整しました。(計算したら元に戻ります。) このままだと微分できないので定義通りこれを微分できる形に引き続き変形します。

$$= \frac{f(x(t+h), y(t+h), t+h) - f(x(t), y(t+h), t+h)}{x(t+h) - x(t)} \cdot \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$+\ \frac{f(x(t), y(t+h), t+h) - f(x(t), y(t), t+h)}{y(t+h) - y(t)} \cdot \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

$$+\ \frac{f(x(t), y(t), t+h) - f(x(t), y(t), t)}{h}$$

$$= \frac{f(x(t) + \Delta x, y(t+h), t+h) - f(x(t), y(t+h), t+h)}{\Delta x} \cdot \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$\begin{pmatrix}\Delta x = x(t+h) - x(t)\\ \Delta y = y(t+h) - y(t)\end{pmatrix}$$

$$+\ \frac{f(x(t),y(t)+\Delta y,t+h)-f(x(t),y(t),t+h)}{\Delta y}\cdot\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

$$+\ \frac{f(x(t+h),y(t),t+h)-f(x(t),y(t),t)}{h}$$

$$\xrightarrow{\begin{pmatrix} h\to 0\\ \Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{pmatrix}}\frac{d}{dx}f(x(t),y(t),t)x'(t)+\frac{d}{dy}f(x(t),y(t),t)\,y'(t)+\frac{d}{dt}f(x(t),y(t),t)=0\quad\cdots④$$

随分と長ったらしい式になりましたが要は合成関数の微分を定義通りに行っただけです。また何度も申し上げますが、この式はただ t で微分して出てくるものにすぎず、接点だけでなく全ての点で成り立ちます。これで手順1での式の導出が終わりました。

b.　接線の方程式の導出

次に接点 $\big(x(s),y(s)\big)$ における E と F の接線が一致することから関係式を導出します。

i.　まず簡単な F の $\big(x(s),y(s)\big)$ の接線の方から求めていきましょう。包絡線 F はから t を消して求めた関係式なのですから接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

より $\big(x(s),y(s)\big)$ における接線の方程式は

$$y-y(s)=\frac{y'(s)}{x'(s)}\{x-x(s)\}$$

$$\therefore y'(s)\{x-x(s)\}-x'(s)\{y-y(s)\}=0\quad\cdots⑤$$

ii.　次に元の曲線 E の $\big(x(s),y(s)\big)$ における接線を求めてみましょう。これはすぐには求まりませんので、とりあえず読み進めてみてください。
パラメーター t によって接点 $\big(x(t),y(t)\big)$ が与えられている時、この点は $f(x,y)=0$ 上にあります。つまり $f(x(t),y(t))=0$ なのでこれを t で微分してみます。定義に基づいて

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\big(x(t+h),y(t+h)\big)-f\big(x(t),y(t)\big)}{h}$$

ここで補足しておきます。1と同じことをおこなっているようにも見える方がいるかもしれません。しかし、この操作は、t が一つに決まった時 $(t=s)$ の $\big(x(s),y(s)\big)$ の接線を求める操作、つまり t は s という定数。それに対し1の t はあらゆる値をとり、その全ての点について微分しているところに違いがあります。

$$= \frac{f\big(x(t+h),y(t+h)\big)-f(x(t),y(t+h))}{h}+\frac{f\big(x(t),y(t+h)\big)-f(x(t),y(t))}{h}$$

$$= \frac{f\big(x(t+h),y(t+h)\big)-f(x(t),y(t+h))}{x(t+h)+x(t)}\cdot\frac{x(t+h)+x(t)}{h}$$

$$+\ \frac{f\big(x(t),y(t+h)\big)-f(x(t),y(t))}{y(t+h)+y(t)}\cdot\frac{y(t+h)+y(t)}{h}$$

$$= \frac{f\big(x(t)+\Delta x,y(t+h)\big)-f(x(t),y(t+h))}{\Delta x}\cdot\frac{x(t+h)+x(t)}{h} \qquad \begin{pmatrix}\Delta x = x(t+h)-x(t)\\ \Delta y = y(t+h)-y(t)\end{pmatrix}$$

$$+\ \frac{f(x(t),y(t)+\Delta y)-f(x(t),y(t))}{\Delta y}\cdot\frac{y(t+h)+y(t)}{h}$$

$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}h\to 0\\ \Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{pmatrix}} \frac{d}{dx}f\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+\frac{d}{dy}f\big(x(t),y(t)\big)y'(t)=0$$

よって接点では．t = s を代入して $\frac{d}{dx}f\big(x(s),y(s)\big)x'(t)+\frac{d}{dy}f\big(x(s),y(s)\big)y'(t)=0$

これをさらに変形して

$$\frac{y'(s)}{x'(s)}=-\frac{\frac{d}{dy}f(x(s),y(s))}{\frac{d}{dx}f(x(s),y(s))}$$

より $\big(x(s),y(s)\big)$ における接線の方程式は

$$y-y(s)=\frac{y'(s)}{x'(s)}\{x-x(s)\} = -\frac{\frac{d}{dy}f(x(s),y(s))}{\frac{d}{dx}f(x(s),y(s))}\{x-x(s)\}$$

$$\therefore \frac{d}{dy}f(x(s),y(s))\{x-x(s)\}-\frac{d}{dy}f(x(s),y(s))\{y-y(s)\}=0 \quad \cdots⑥$$

⑤式より

$$\therefore y'(s)\{x-x(s)\}-x'(s)\{y-y(s)\}=0 \quad \cdots⑤$$

包絡線の定義上⑤式と⑥式が一致するので x, y の係数を比較することにより

$$\frac{d}{dy}f\big(x(s), y(s)\big)x'(s) + \frac{d}{dy}f(x(s), y(s))y'(s) = 0 \ \cdots ⑦$$

を得ます。振り返りますと、$\big(x(s), y(s)\big)$ の接線が一致することから⑦式を求めましたので、接点上でのみこの式は成り立ちます。ここで④式を見ます。

$$\frac{d}{dx}f(x(t), y(t), t)x'(t) + \frac{d}{dy}f(x(t), y(t), t)\,y'(t) + \frac{d}{dt}f(x(t), y(t), t) = 0 \ \cdots ④$$

④式は、$\big(x(t), y(t)\big)$ つまり関数の座標上について成り立つので当然 $\mathrm{t = s}$ でも成り立ち、

$$\frac{d}{dx}f(x(s), y(s), s)x'(s) + \frac{d}{dy}f(x(s), y(s), s)\,y'(s) + \frac{d}{dt}f(x(s), y(s), s) = 0 \ \cdots ④'$$

④´式と⑦式を見比べてください。左二つの項は、結局 $f(x, y, t)$ を x と y で微分したものですから等しいです。つまり接点の座標では

$$\frac{d}{dt}f(x(s), y(s), s) = 0$$

が成り立ち証明完了です。

いかがだったでしょうか。厳密に言えば、これは必要条件で十分性を確認しないといけないのですが、多くの場合十分条件にもなっているそうです。（今回はここには触れません）
高校内容の、さらに言えば微分の定義だけで記述してみました（そのこともあって曖昧なところが多少あります。）が、理解していただけましたか？今回これを書こうと思った何よりのきっかけは、解き方を知っていたのに、なぜそうなるのかを知らなかったからです。最初は、大学の数学を使うと知って、そういうものだと定理として受け入れていましたが、実際自分の持っている知識だけで試行錯誤していくのは、また違った面白さがあったと思います。皆さんもふと気になったものを、調べてみたら新しい発見があるかもしれませんよ。長い間ありがとうございました。

バーコードのチェックデジット

３年９組　木下　裕貴

１．はじめに

バーコードのチェックデジットとは何か知っていますか？バーコードのチェックデジットとは、バーコードを正しく読み取れたかどうかをチェックするために算出された数値です。その数値はある規則によって求めることができます。今回は、いくつかのタイプにわけて紹介しようと思います。

２．GTIN（JAN コード）標準タイプのチェックデジットの計算方法

①：全ての偶数桁の数字を足す
②：①の結果を３倍する
③：全ての奇数桁の数字を足す
④：②の結果と③の結果を足す
⑤：④の結果の下一桁の数字を１０から引いたものがチェックデジット
（下一桁が０のときはチェックデジットは０）

例えば、GS1 事業者コードを１２３５８７０７２、商品アイテムコードを８７３とする。この時、チェックデジットは、次のように計算する。

桁	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
例	1	2	3	5	8	7	0	7	2	8	7	3	?

①；２＋５＋７＋７＋８＋３＝３２
②：３２×３＝９６
③：１＋３＋８＋０＋２＋７＝２１
④：９６＋２１＝１１７
⑤：１０－７＝３　　　　　よってチェックデジットは３となる　　？➡3

３．GTIN（JAN コード）短縮タイプ（８桁）のチェックデジットの計算方法

例えば GS1 事業者コードを６４９８２８、商品アイテムコードを７とする。
この時、チェックデジットは、次のように計算する。

桁	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
例	0	0	0	0	0	6	4	9	8	2	8	7	?

①：０＋０＋６＋９＋２＋７＝２４
②：２４×３＝７２
③：０＋０＋０＋４＋８＋８＝２０
④：７２＋２０＝９２
⑤：１０－２＝８　　　　　　　よってチェックデジットは８となる　　　？➡８

４．GTIN（集合包装用商品コード）（１４桁）のチェックデジット計算方法
例えば、インジケーターを１，GS1 事業者コードを４２３５８９７６６、商品アイテムコードを２９３とする。この時、チェックデジットは、次のように計算する。

桁	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
例	1	4	2	3	5	8	9	7	6	6	2	9	3	?

①：１＋２＋５＋９＋６＋２＋３＝２８
②：２８×３＝８４
③：４＋３＋８＋７＋６＋９＝３７
④：８４＋３７＝１２１
⑤：１０－１＝９　　　　　　よってチェックデジットは９となる　　　　？➡９

５．U.P.C（１２桁）のチェックデジットの計算方法
例えば、U.P.C. Company　Prefix を７８５４６１９、商品アイテムモードを６３２８とする。この時、チェックデジットは、次のように計算する。

桁	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
列	7	8	5	4	6	1	9	6	3	2	8	?

①：７＋５＋６＋９＋３＋８＝３８
②：３８×３＝１１４
③：８＋４＋１＋６＋２＝２１
④：１１４＋２１＝１３５
⑤：１０－５＝５　　　　　　よってチェックデジットは５となる　　　　　？➡５

６．SSCC（１８桁）のチェックデジット計算方法
例えば、拡張子を３、GS1 事業者コードを８５５６２１７６６、シリアル番号を００

００００１とする。このチャックデジットは、次のように計算する。

桁	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
例	3	8	5	5	6	2	1	7	6	6	0	0	0	0	0	0	1	?

①：３＋５＋６＋１＋６＋０＋０＋０＋１＝２２
②：２２×３＝６６
③：８＋５＋２＋７＋６＋０＋０＋０＝２８
④：６６＋２８＝９４
⑤：１０－４＝６　　　　よってチェックデジットは６となる　　　　？➡６

７．終わりに
どうでしたか？結局やっていることはワンパターンでしたね。あまり数学に関係ないのでは？と思った人もいるのではないでしょうか。しかし、チェックデジットの計算方法は応用が効くので共通テストにチェックデジットに関する問題が出る！可能性もありますよね。今回、数字を特定して計算しましたが、ほかの数字でも本当にこの仕組みが働いているのか確認してみてください！

８．参考文献
https://www.gs1jp.org/code/jan/check_digit.html チェックデジットの計算方法

グラフ理論と最短経路問題の応用

兵庫県立神戸高等学校 数学研究会 3 年 工樂瑛友

1 グラフ理論とは？

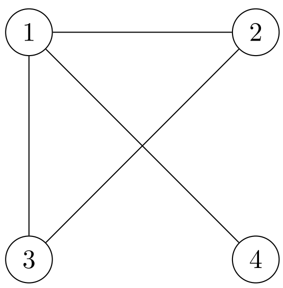
みなさんは「グラフ理論」という言葉に聞き覚えはありませんか？ グラフ理論とは, 名前の通り「グラフ」についての理論です．しかし, ここでいう「グラフ」とは, 高校数学までで習う「x の関数 $f(x)$ に対し, 点 $(x,\ f(x))$ を集めた xy 平面上の曲線」ではありません．今回扱う（離散数学における）「グラフ」[*1]とは, 以下のように定義されます．

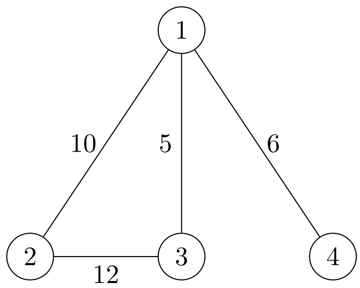
定義 1: グラフ

グラフ G とは, いくつかの**頂点**の集合 V といくつかの**辺**の集合 E の組である．ただし, **辺**とは, V に属する相異なる 2 点 u, v を向きに関係なく結ぶようなものとして定義される．また, E に属する任意の 2 辺は相異なるものとする．

少し意味が分かりにくいので, グラフの例を図示してみましょう．例えば, 左下図は頂点が 4 つ, 辺が 4 本のグラフです．ここで大事なのは, 各頂点の位置や各辺の見た目の長さは全く重要でないということです．すなわち, グラフ理論とは, 頂点のつながり方を抽象的に見て, それを考察するものであると言えます．

また, グラフの辺には「重み」という数値を定めることができます．重みが各辺につけられたグラフを**重み付きグラフ**といい, 右下図がその一例です．





ここまで読んできて, このような理論について議論してどうなるのかと思った方もいらっしゃるでしょう．実は, とても身近なところにもグラフは存在しています．いくつもの点と点が線でつながっていて, それぞれの線に数値が定まっているものといえば, 「路線図」です！ 頂点を「駅・路線図」として, 辺の重みを「所要時間」に見立てれば, 路線図は重み付きグラフとみなせるのです．そして, ある頂点から別の頂点へと移動する経路をグラフ上で決めれば, 経路に含まれる辺の重みを足していくことによって, 移動の所要時間を求めることができます（一般には, この重みの和を「(グラフ上の）距離」といいます）．本記事ではグラフ理論を活用して, 「数研部員が 1 か所に集まるとしたらどの地点が最適か」という問いに答えてみたいと思います．具体的には, 神戸市周辺の鉄道・神戸市バスの路線図に, 頂点 8 つ（3 年生数学研究会員 8 名の出身中学校）と, それらと最寄り駅を結ぶ辺を追加したグラフ[*2](図 1) を用い, 「8 人分の中学校からの移動所要時間の総和が最小となるような地点」[*3]を求めます．

[*1] 今回は, 単純な無向グラフのことを「グラフ」と呼称する．

[*2] いくつか省略した駅や, 一つにまとめた駅が存在する．また, 乗り換え時間や実際のダイヤ等は考慮していないため, 今回の結論が現実でそのまま応用できるとは限らない．

[*3] 以下, 「最適地点」と呼ぶ．

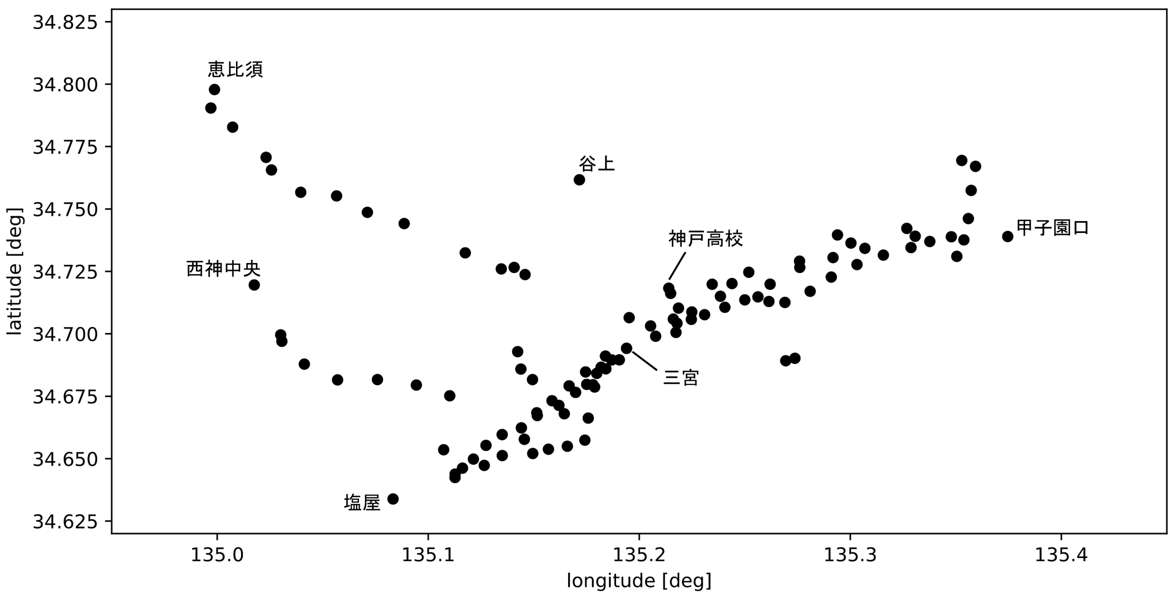
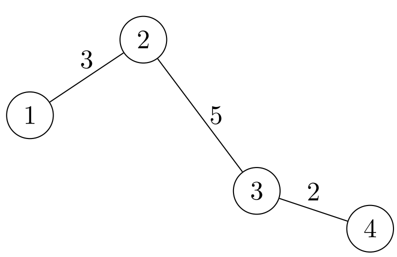


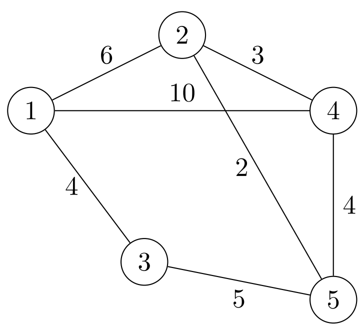
図 1　使用したグラフの頂点の一覧（辺は省略）

2　ダイクストラ法

最適地点を求める前に, グラフの頂点の中から出発地点と目的地点が与えられたときに, そのグラフ上の距離を求める方法について考えます. もし, グラフが左下図のように一本道の場合, 出発地点を頂点 2, 目的地点を頂点 4 とするなら, 所要時間は $5+2=7$ となります.

しかし, 右下図のような少し複雑なグラフで出発地点を頂点 1, 目的地点を頂点 5 とした場合, 単純に足していくだけでは距離を求めることはできません. なぜなら, 頂点 1 から頂点 5 に向かう経路が複数存在するからです. もちろん, ある程度観察すると, $1 \to 2 \to 5$ の経路を使うことで距離が最小になることが分かります（距離は $6+2=8$）が, 実際の路線図はさらに複雑で, このように目で見て最短経路を求めるのは非常に難しくなります.





そこで, **ダイクストラ法**というアルゴリズム[*4]を用います. これは, 出発地点に近い頂点から順番に, 出発地点からの最短距離を決定していくような手法です. 具体的には, 次の 2 つを繰り返しながら各頂点の出発地点からの最短距離を確定させていきます [1].

(1)「既に最短距離が確定した頂点」につながる頂点たちについて, 「最短距離の候補」を求めておく.

(2)「最短距離の候補」が最も小さい頂点の最短距離を確定させる.

[*4] 問題を解いたり計算をしたりするときの手順のこと.

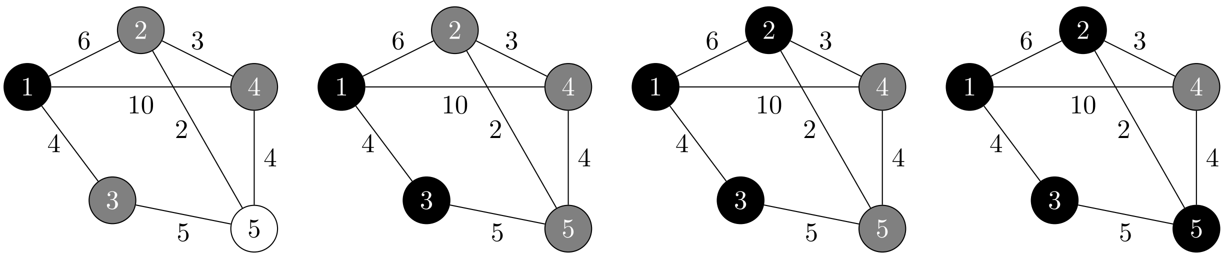
先ほどの例でどのように最短距離を求められるか, 下図を使って説明します. 初期状態では, 「既に最短距離が確定した頂点」は頂点 1（最短距離は 0）のみで, 「既に最短距離が確定した頂点」につながる頂点たちは, 頂点 2, 3, 4 です.

※既に最短距離が確定した頂点を黒色, そうでない頂点のうち黒色の頂点とつながっているものを灰色で表す. 図は左から, 初期状態, (1) の後, (2) の後, (3) の後.

(1) 最短距離の候補は, 頂点 2：$0+6=6$, 頂点 3：$0+4=4$, 頂点 4：$0+10=10$. 最小なのは, 頂点 3 だから, 頂点 3 の最短距離を 4 で確定させる.

(2) 最短距離の候補は, 頂点 2：$0+6=6$, 頂点 4：$0+10=10$, 頂点 5：$4+5=9$. 最小なのは, 頂点 2 だから, 頂点 2 の最短距離を 6 で確定させる.

(3) 最短距離の候補は, 頂点 4：$6+3=9$, 頂点 5：$6+2=8$. 最小なのは, 頂点 5 だから, 頂点 5 の最短距離を 8 で確定させる.



では, ダイクストラ法を用いて神戸高校から各頂点までの最短所要時間を求めてみました（図 2）. 図を見ると, 神戸高校から位置的に離れていくと, 所要時間が長くなっていることが分かります. これを見るに, このアルゴリズムで正しい所要時間が求められそうだと分かります.

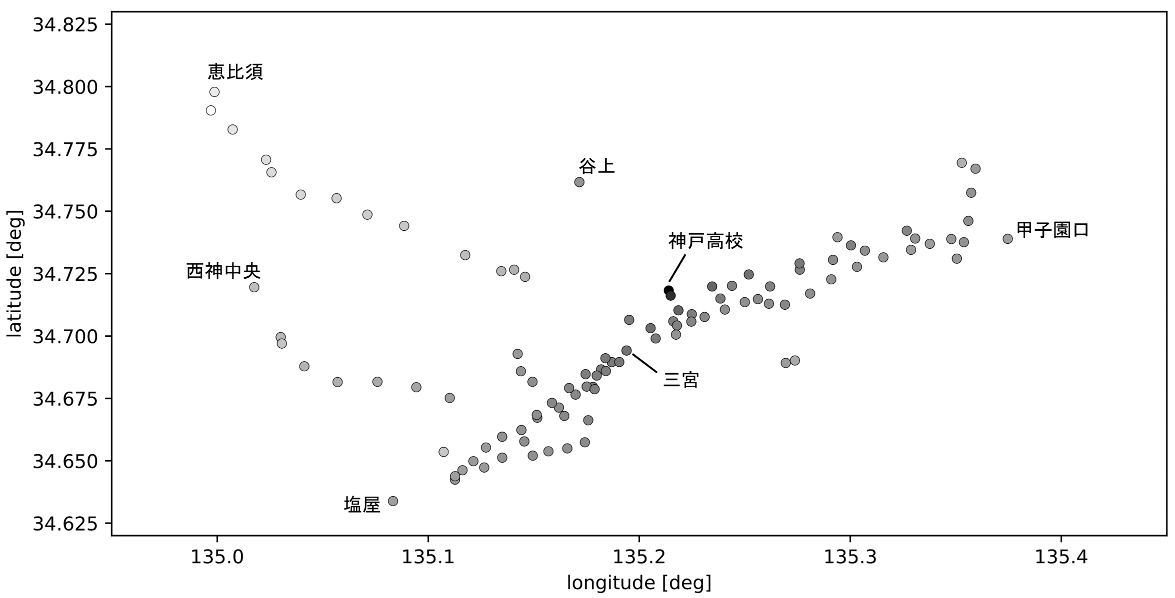


図 2　神戸高校から各頂点までの所要時間を計算（色が濃いことは, 所要時間が短いことを表す.）

3　最適地点を求める

では, 最後に最適地点を求めていきます. 方法としては, 神戸高校から各頂点までの所要時間を求めたのと同様に, 各中学校から各頂点までの所要時間を求めて総和を出し, それが最も小さくなる頂点を探し出します. 結果が次の図 3 になります. 最も所要時間の総和が小さかった頂点は, 三宮（三ノ宮）駅でした. 地理的にも中央付近にあり, 様々な路線でアクセスできる駅が最適地点となったのは, 納得できる結果でした.

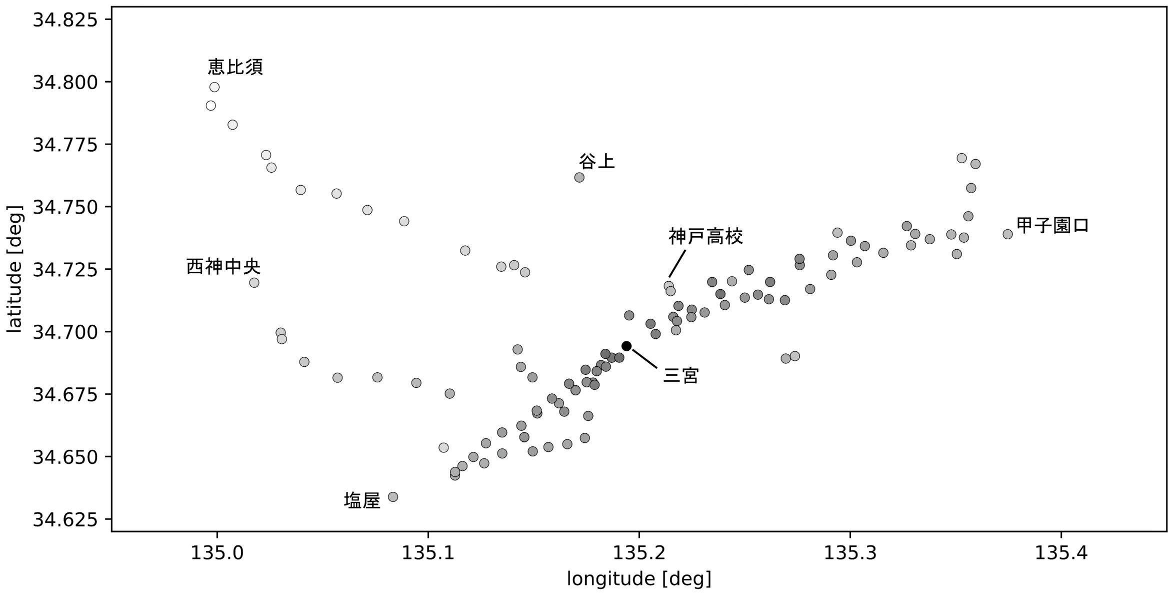


図 3　各中学校から各頂点までの所要時間の総和を計算（色が濃いことは, 所要時間の総和が小さいことを表す.）

今回はグラフ理論の最短経路問題を現実の事象に応用させてみました. グラフ理論だけでなく, 物体の運動における運動方程式や, 生態系についての微分方程式など, 数学はたくさんのところに応用することができます. 是非色々な応用について調べてみてください.

参考文献

[1] ダイクストラ法による単一始点最短経路を求めるアルゴリズム — アルゴリズムロジック. `https://algo-logic.info/dijkstra/`. (Accessed on 04/10/2023).

微分方程式による生命現象の記述

～生命科学は数学でどのように理解できるか～

3 年 9 組 伊藤 真

１．初めに

近年，分子生物学の理解が急速に進んでいる。しかし，その方向はどんどんミクロの方向に向かっている。つまり，生体分子の「細かい」挙動についてはわかってきているのだが，それらが組み合わさって何が起きるのかという「広い」視点での理解はあまり進んでいない。そこで，マクロなものを扱う道具，つまり数学を用いて，分子生物学の現象を理解することができないか，と思うわけである。
本稿では，分子生物学の中でも，遺伝子発現という現象に着目して，数学を用いてそれをマクロなモデルにする方法，およびそのモデルの簡単な解析方法ついて紹介する。
（本記事は，簡単な微分方程式の知識と，ベクトル・行列の初歩的な演算の知識を前提にしているが，数式自体が分からなくとも，数式が何を意味しているかについてはその都度説明しているので，言葉を追いかけていけば全体の流れは見えるはずである。臆せずに読んでいただきたい。）

２．下準備

とは言ったものの，この部誌をわざわざ読むような人の中には，いわゆる「生物アレルギー」で，記事のタイトルを見て読む気が失せた方も少なからずいるだろう。そのような人のためにも，まずは遺伝子発現のメカニズムを，本稿の趣旨に合わせて簡単に説明する（本当に「簡単」に。これ自体はメインの話ではないので，細かい話はカットした）。知識がある方もざっと一読することをおすすめする。

遺伝子が発現するとは，簡潔に言うと，設計図から部品を作る，ということである。
細胞内の核と呼ばれる器官の中には DNA と呼ばれる物質があり，これが設計図にあたる。この設計図を外に持ち出すために，DNA の情報を，一時的に mRNA とよばれる物質に変換する（これを転写という。まさに，DNA の情報を mRNA に書き移している）。
その後，mRNA がその情報をもとにして，生体を構成する部品，つまりタンパク質を構成する（これを翻訳という。まさに，mRNA の情報をタンパク質という形に翻訳している）。
以上が，遺伝子発現の一連の流れである。
つまり，遺伝子発現とは，DNA に蓄えられた情報が，mRNA を経由することで，タンパク

質という形で現れる，というプロセスである。

３．１次元での記述

それでは，実際に遺伝子発現を微分方程式で記述してみよう。
なお，この章では，「遺伝子発現量」とは「遺伝子が翻訳された結果生産されたタンパク質の濃度」を指す。
まずは簡略化のため，１次元（１つ）の遺伝子について見ていく。
遺伝子発現量は一定のスピードで増加するが，当然，タンパク質は時間と共に分解されていき，タンパク質量が多いほどその分解速度は速くなる。
ここで，遺伝子の量が単位時間当たりαだけ変化し，遺伝子の発現量に比例してβだけ分解するとする$(\alpha, \beta > 0)$。
xを遺伝子発現量（時間tの関数）とすると以下の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - \beta x \qquad ①$$

これは変数分離系の微分方程式なので，まず変数を左辺に集める。

$$\frac{1}{\alpha - \beta x}\frac{dx}{dt} = 1$$

両辺をtで積分して

$$\int \frac{1}{\alpha - \beta x} dx = \int 1\, dt$$

（ここで，置換積分の公式を用いた。）
これより，

$$-\frac{1}{\beta}\log(\alpha - \beta x) = t + c$$

（cは定数）が得られ，これを変形して，

$$x(t) = \frac{\alpha}{\beta} - x_0 e^{-\beta t}$$

を得る（ただし，$x_0 = \frac{e^{-\beta c}}{\beta}$）。

（$\alpha - \beta x = 0$の場合の議論は省略するが，結論として，$\alpha - \beta x = 0$の場合も上の式に従う）

ここで，$t \to \infty$とすると，$x(t) \to \frac{\alpha}{\beta}$となることがわかる。

これが何を意味するかというと，①式のような微分方程式で記述されるシステムにおいて，
(1) 時間が十分に経過したら遺伝子発現量がある値に収束して，
(2) 遺伝子の生産量（α）が大きいほど，また，分解速度（β）が小さいほど，その収束値が大きくなるということが定量的に理解できる（当然，直感的にも(1)(2)は予測できるのだ

が，数学的に考察できるというのはとても興味深い)。
このように，微分方程式によって遺伝子発現を表すことによって，時間経過による遺伝子発現量の変化について考察することができるのである。

４．多変数の場合

とは言え，遺伝子発現が 1 つの遺伝子のみによって制御されるわけではない。多くの場合，遺伝子同士が互いに影響を及ぼし合うことによって，全体の遺伝子発現が制御される。
遺伝子 A の転写・翻訳によって生成されるタンパク質をタンパク質 A と表す。
例えば, タンパク質 A は遺伝子 A, 遺伝子 B の発現を抑制し, 遺伝子 C の発現を促進する, タンパク質 B は遺伝子 A,B の発現を抑制し, 遺伝子 C の発現は促進する, タンパク質 C は, 遺伝子 A, B の発現を促進するが，遺伝子Cの発現は抑制する，という場合はどうだろうか（あくまでも例であり，実際にこのような遺伝子発現システムを持った細胞が存在するというわけではない)。
a, b, c, d, e, f, g, hを正の定数とすると，以下のように記述できる。

$$\frac{d}{dt}x_A = -ax_A - bx_B + cx_C$$

$$\frac{d}{dt}x_B = -dx_A - ex_B + fx_C$$

$$\frac{d}{dt}x_C = gx_A + hx_B - ix_C$$

たとえば一行目の式では，タンパク質 B の量に比例して，遺伝子 A の発現スピードが低下し, タンパク質 C の量に比例して, 遺伝子 A の発現スピードが増加することを表している。
また，タンパク質 A の量に比例して，遺伝子 A の発現速度が減少するという負のフィードバック作用も表している（細かく言うと，遺伝子が一つの場合と同様，濃度に比例して分解もするのであるが，その要素は $-a$の中に含まれているとする)。

ところで，この形，どこかで見覚えはないだろうか。そう，線形常微分方程式である。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -a & -b & c \\ -d & -e & f \\ g & h & -i \end{pmatrix}$$

とすると

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$$

と表される。
より一般的に考えよう。n個の遺伝子の相互作用による全体の発現変動について，ベクトル$\boldsymbol{x}$の成分は各遺伝子の発現量を，行列Aの要素は相互作用を表しているとする，

つまり，以下のように表されるとすると，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$$

となる。

このように，遺伝子発現のダイナミクスは，線形常微分方程式を用いて表すことができる。

（補足）

で，結局何がしたいのかという話だが，もし係数行列の要素が既知であれば，それで良いのだが，しかし当然，係数行列が初めから既知でないこともあり（というかほとんどの場合未知である），その場合は，係数行列を観測データから帰納的に求めることから始める。その際，観測データができるだけこの方程式に従うような係数行列を求める必要がある。つまり，上記モデルは，観測データをもとに遺伝子間相互作用（係数行列）について調べるときに，理想の関係式として使用するためのものだととらえることもできる（イメージとしては，最小二乗法の考え方と近い。最小二乗法では相関係数$r^2 = 1$のものを理想の関係式として用いるが，今回においては，上記の微分方程式が理想の関係式にあたる）。

５．転写と翻訳のモデル化

上記議論では，遺伝子発現量をタンパク質の量とし，実質的に mRNA 量＝タンパク質量とした。しかし，これでは，転写と翻訳の区別をすることができない。より正確に表現するには，転写と翻訳の段階を分ける，つまり，mRNA の発現量とタンパク質の量を別の変数として考える必要がある。

ということで，次は転写と翻訳の段階を分けてモデル化してみよう。

なお，ここでは，mRNA と，そこから翻訳されるタンパク質を 1 対 1 対応とした。

n次元ベクトル$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}$をそれぞれ mRNA，タンパク質の濃度とすると，まずは，以下のように記述できる。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = f(\boldsymbol{p}) - V\boldsymbol{r} \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = L\boldsymbol{r} - U\boldsymbol{p}$$

ここで，$f(\boldsymbol{p})$は転写を表す関数であり（これが$\boldsymbol{p}$依存なのは，タンパク質濃度が転写に影響するため。フィードバック作用を表す。），Lは翻訳効率を表す定数行列，V, Uはそれぞれ mRNA，タンパク質が分解する割合（定数行列）を表す。

これを用いて，mRNA，タンパク質の濃度の変化を解析していく。

まず，$\boldsymbol{p}$の初期値を$\boldsymbol{p_0}$として，テイラー展開を 1 次で区切ることにより，以下を得る。

$$f(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{p_0}) + (\frac{df(\boldsymbol{p})}{d\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{p_0})\,(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0})$$

ここで，$C=\frac{df(\boldsymbol{p})}{d\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{p_0}$ ，$\boldsymbol{s}=f(\boldsymbol{p_0})-(\frac{df(\boldsymbol{p})}{d\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{p_0})\boldsymbol{p_0}$ とすると，上の式は，

$$f(\boldsymbol{p})=C\boldsymbol{p}+\boldsymbol{s}$$

と表される。

よって，以下の式が成り立つ。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=C\boldsymbol{p}-V\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s} \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=L\boldsymbol{r}-U\boldsymbol{p}$$

ベクトル$\boldsymbol{s}$を何かしらの方法で消すことができれば，その後の処理は簡単である。そこで，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r_s}$　$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p_s}$と変換すれば，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=C\boldsymbol{p}-V\boldsymbol{r}+(C\boldsymbol{p_s}-V\boldsymbol{r_s})+\boldsymbol{s} \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=L\boldsymbol{r}-U\boldsymbol{p}+(L\boldsymbol{r_s}-U\boldsymbol{p_s})$$

が成り立つ。

$$\begin{pmatrix}-V & C\\ L & -U\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r_s}\\ \boldsymbol{p_s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{s}\\ 0\end{pmatrix}$$

を満たすように$\boldsymbol{r_s},\boldsymbol{p_s}$を定めることで，$\boldsymbol{s}$が消去される。

ここで，VとLはその定義から正則行列であり，対角行列なので，この方程式は，一意解を持つといえる。よって，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=C\boldsymbol{p}-V\boldsymbol{r} \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=L\boldsymbol{r}-U\boldsymbol{p}$$

について考えればよい。

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}-V & C\\ L & -U\end{pmatrix}$$

とすると，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=M\boldsymbol{x}$$

と表される。

Mは$2n$個の固有値を持つので，それを$\boldsymbol{\lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_{2n}\end{pmatrix}$とすると，以上の微分方程式の解は，以下のように表される。

$$\boldsymbol{x}(t)=Qe^{\boldsymbol{\lambda}t}$$

ここで，Qは，各成分がtについての多項式である$2n\times 2n$の行列で，成分をq_{ij}で表すと，

$$\sum_{j=1}^{2n}\deg(q_{ij})+1\le 2n \qquad (i=1,2,\cdots 2n)$$

を満たす。

こうすることにより，mRNA 量とタンパク質量を別の変数として，遺伝子発現のダイナミクスを表すことができる。

６．安定性解析

それでは，このシステムの解析に移る。今回は，システムの安定性に着目する。
遺伝子発現においては，そのダイナミクスが「安定」である，つまり，時間によらず，遺伝子発現量が一定の範囲内に収まることが必要である。
Mの固有値の実部がすべて負であり，行列Qの各成分が定数であるとき，上記システムは安定であるという（証明は割愛）。
これによって，システムが安定であるかどうかを判断することができ，また，あらかじめ安定であるとわかっているシステムをモデル化する際に，モデル化した数式が，システムが安定である条件に従うかどうかを確認することで，モデルの妥当性を確認することもできる。

７．最後に

いかがだっただろうか。遺伝子発現のように，要素が複雑に絡みあう系の全体像を理解するには，このような数学的な表記が有効になることが分かっただろう。しかし，上記の議論では，簡略化のために考慮しなかった条件がいくつもある。また，紙面の都合上載せきれなかったが，非常に興味深い現象もまだたくさんある。詳しく知りたければ，是非自分で調べて学びを深めてみてはいかがだろうか。

８．謝辞

校閲してくださった先輩方及び先生方に，この場を借りて感謝を申し上げる。

参考文献

(1) Madison Kuduk. Modeling Gene Expression with Differential Equations. 2020
(2) Ting Chen et al. Modeling Gene Expression with Differential Equations. 1999
(3) “物理みたいな生物やろう！システム生物学①（遺伝子制御）”．予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」. https://m.youtube.com/watch?v=p6NM8-PNndY

算数編

算数問題

1.

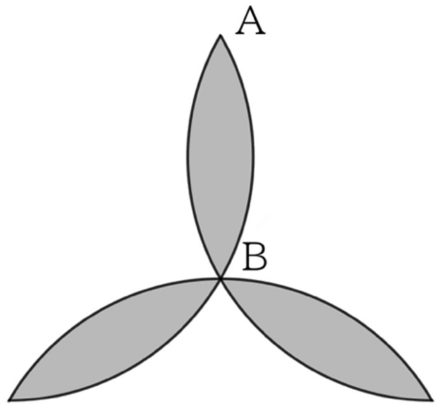
異なる4つの 0 以上の整数があります。この4つ整数から2つの整数を選び、その2つの和と差を求めます。2 つの整数の選び方をすべて考えてそれぞれの和と差を求めます。このようにして求めたすべての数を大きい順に並べると

95 , 85 , 83 , 49 , 48 , 47 , ア , 37 , 36 , 12 , 10 , 2

となりました。ア にあてはまる整数は何ですか。

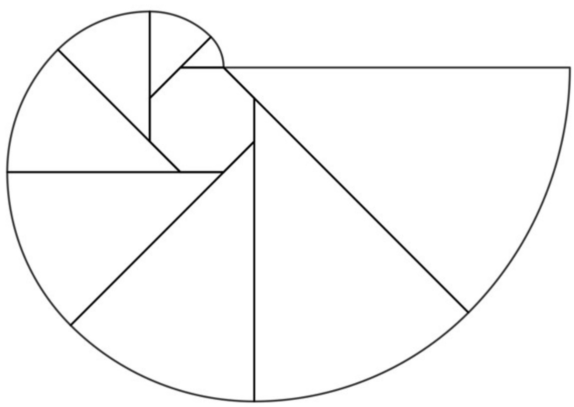
2.

右図は同一の円弧を 3 本用いた図形である。線分 AB の長さが 6 の時、この図形の周の長さを求めよ。ただし、円周率は 3.14 とする。



3.

下の図は、1 辺 1cm の正八角形の周りに扇形を 8 つかいたものである。この図形の周の長さを求めよ。ただし、円周率は 3.14 とする。



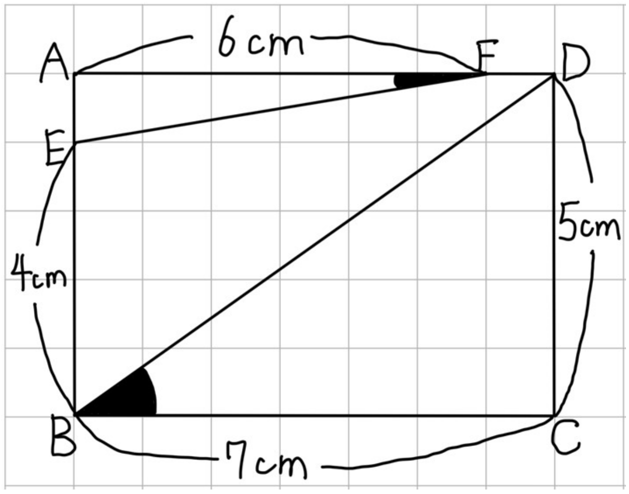
4.

地球の赤道の周りの 1m 外側にひもを巻くとすると、ひもの長さは赤道の周りの長さより何 m 長くなるか。地球の直径を 12800000m として計算せよ。円周率は 3.14 とする。

5.

図のように長方形 ABCD の内部に線分 EF と線分 BD が引かれている。

色のついた角の和は何度か。（∠AFE＋∠DBC）



算数問題　解答解説

1.

4 つの数を a , b, c , d とする。($a > b > c > d$ とする)

最も大きい数は、$a + b = 95$ …①

次に大きい数は、$a + c = 85$ …②

ここで、①−②　$b - c = 10$ …③

①　②の他に大きい数は、“ $a + d$ ”、“ $a - d$ ”、“ $b + c$ ”が考えられる。…④

ここで, ③より $b = c + 10$ と表せるため、

$b + c = (c + 10) + c = 2c + 10$

よって、$b + c$ は偶数である。

よって、 $b + c = 48$ …⑤

ここで、③+⑤ $2b = 58$

$b = 29$ …⑥

また、④より 3 番に大きい数は $a + d$ である。　$a + d = 83$ …⑦

よって、②−⑦ $c - d = 2$ …⑧

したがって、③⑥より　$c = 19$ …⑨

また、⑧⑨より　$d = 17$

よって、計算を進めると

ア　$b + d = 46$

〈別解〉

4 つの整数をa,b,c,dとする。($a > b > c > d$)

12 個の整数を集合 A とすると、

A={95,85,83,49,48,47, x, 37,36,12,10,2}

a, b, c, dの和と差の組み合わせを集合 B とすると、

B={$a + b, a + c, a + d, b + c, b + d, c + d, a - b, a - c, a - d, b - c, b - d, c - d$}

A=B より、A の集合の合計と B の集合の合計は等しいから

$504 + x = 6a + 4b + 2c$

$3a + 2b + c = 252 + x/2$ …①

$a + b$は最大だから、$a + b = 95$ …②

$a + c$は 2 番目に大きいから、$a + c = 85$ …③

②　×3−①より、$b - c = 33 - x/2$ …④

③　+④より、$a + b = 118 - x/2$ …⑤

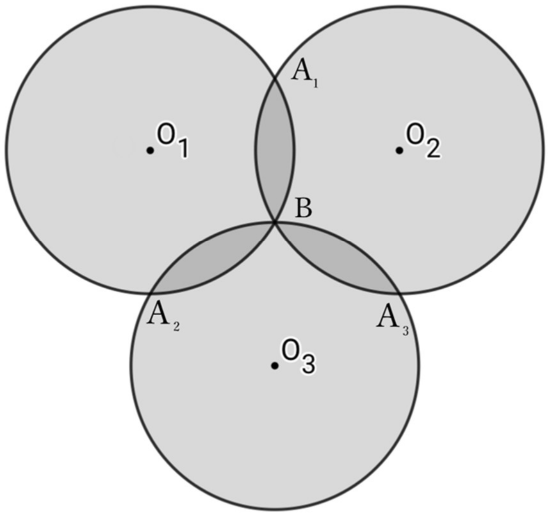
②、⑤より、$95 = 118 - x/2$

∴ $x = 46$

2.

完全な円弧を描くと右図のようになる。3 つの合同な円を用いて本問のような図形を描くとき、

三角形 O_1A_1B, O_1A_2B, O_2A_1B, O_2A_3B, O_3A_2B, O_3A_3B は合同で、半径６の正三角形となる。図形の周の長さは半径６の円の円周と等しいので



$6 \times 2 \times 3.14 = 37.68$

解答　37.68

3.

扇形の中心角は全て正八角形の外角なので

360°　÷8=45°

扇形の半径は 1cm ずつ長くなっているので、孤の長さの合計は

(1+2+3+4+5+6+7+8)×2×3.14×45/360

=28.26

半径 8cm の扇形の半径を足すと、求める周の長さは

28.26+8=36.26cm

4.

6.28m

赤道の周りより 1m 外側の長さは（12800000＋2)×3.14 m、

赤道の周りの長さは 12800000×3.14 m である。

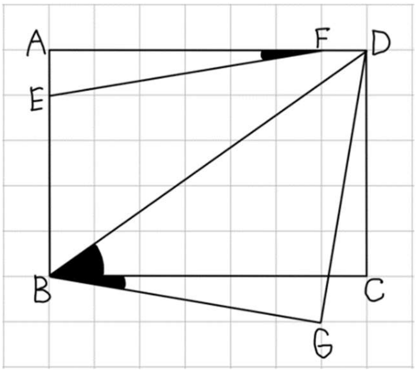
それらの差は（12800000＋2)×3.14－12800000×3.14＝6.28

（円の半径の大きさに関わらず、常に 6.28 となる。）

5.

45°

下図のように、∠CBG＝∠AFE、BC との距離が 1 になるような点 G を定め、三角形 GBD を考える。証明は省略するが、これは∠G が 90° の直角二等辺三角形であるため、∠DBG＝45° つまり∠AFE＋∠DBG＝45° である。



中学数学編

数学の問題

1.

(1)$36+42$を計算しなさい

(2)$\frac{15}{7}-\frac{7}{15}$を計算しなさい

(3)ここでは、演算記号「引く」を【引く】、符号「マイナス」を【マイナス】と表す。
a【引く】b と a【マイナス】b の意味の違いを、ある法則を用いて説明せよ

2.

$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$とする

(1) a_1を求めよ

(2) a_2を求めよ

(3) $a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$となることを証明せよ

(4) a_{10}を求めよ

※a_nで数列aの第n項を表す

（例）　$a_n=2n+1$のとき,

$a_1=2\times1+1=3$

$a_2=2\times2+1=5$

$a_3=2\times3+1=7$

3.

A さんは自分の髪の毛からランダムに 16 本を抽出し、それらの長さを図 1 の資料に整理した。(1)から(3)に答えよ。

▼図 1

髪の毛の長さ(cm)	度数
0 以上 2 未満	0
2 以上 4 未満	1
4 以上 6 未満	1
6 以上 8 未満	4
8 以上 10 未満	ア
10 以上 12 未満	イ

12 以上 14 未満	ウ
14 以上 16 未満	4
16 以上 18 未満	エ

(1) 平均値が 11cm、中央値が 10cm の時、ア、イ、ウ、エに入る数値を答えよ。

(2) 図 1 をもとに度数分布多角形を作図せよ。

(3) (2)の度数分布多角形において横軸、縦軸ともに 1 目盛を 1cm としたとき、度数分布多角形と横軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

4.

平面上で、点 P が 1 辺の長さ 2 の正三角形の周上を動き、点 Q は半径 1 の円周上を動く。このとき、PQ の中点 M の動く範囲の面積を求めよ。円周率は π とする。

5.

正五角形 ABCDE がある。

(1)角 AHB は角 ABH の何倍か。

(2)線分 AC は線分 CD の何倍か。

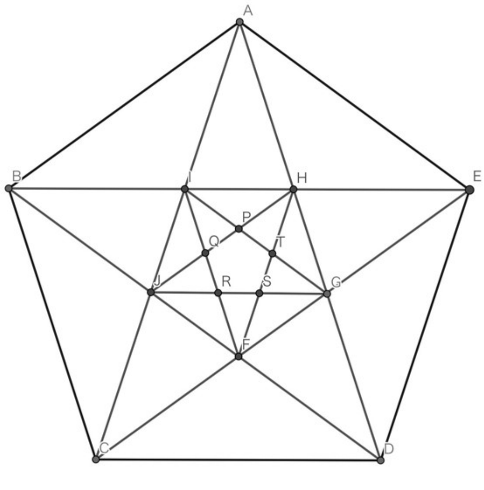
(3)線分 IJ は線分 BJ の何倍か。

(4)線分 BE は線分 AB の何倍か。

(5)正五角形 ABCDE は正五角形 FGHIJ の何倍か。

(6)正五角形 PQRST は正五角形 ABCDE の何倍か。

(7)星形 AIBJCFDGEH は正五角形 FGHIJ の何倍か。

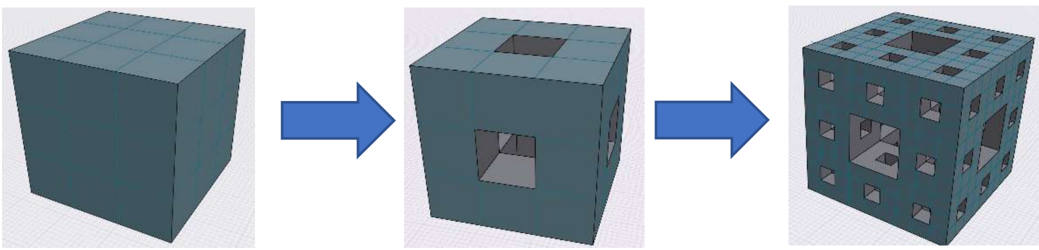


6.

まず一辺の長さが 1 の立方体を用意する。

操作 1 ：立方体を等しい２７個の立方体に分ける。

操作 2 ：２７個のうち、各面の中心の立方体と中央の立方体を削除する。



これらの操作によって残った立方体について上記の操作 1， 2 を無限に繰り返す。

それによって得られる立体をＦとする。

（１）　１回の操作によって体積は何倍になるか求めましょう

（２）　１回の操作によって辺の長さの和は何倍になるか求めましょう

（３）　a が実数かつ$a \geq 0$のとき　$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & (a < 1) \\ 1 & (a = 1) \\ \infty & (a > 1) \end{cases}$

（例：a=3 のとき∞、a=0.7 のとき０）

上の式はある数 a を無限乗したときの答えを示している。

これを用いてＦの辺の長さの和と体積を求めましょう。

（４）　β次元の図形を、辺の長さをα倍したときに体積がα^βとなる。

（α、βは０より大きい有理数）と定義する。

このことと、∞回操作を繰り返した図形と∞＋１回操作を繰り返した図形は体積、辺の長さがともに等しく、同じ図形であるとみなしてよいことを用いてＦが次元βを求めましょう。ただし答え方は、Ａをβ乗したらＢになる数としてもよい。

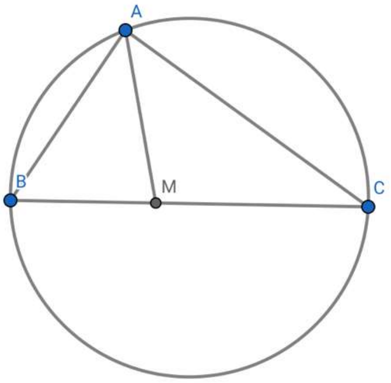
（例：２をβ乗したら８になる数　　　Ａ．$\beta = 3$）

（５）（４）で求めたβが整数でないことを$y = 3^x$のグラフが単調増加であることを利用して、示しましょう。

7.

三角形 ABC において∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を M とするとき、

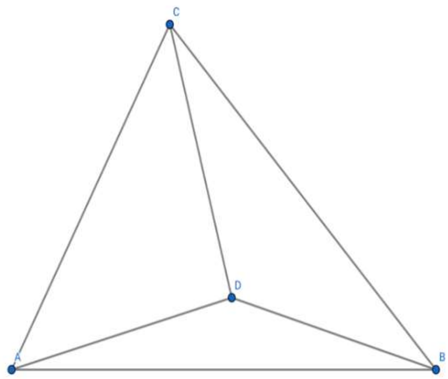
$AM^2 = AB \cdot AC\{1 - (\frac{BC}{AB+AC})^2\}$となることを示しなさい。



8.

Bob さんは鋭角三角形ABCの内部に点Ｄを取ったときの各頂点から点Ｄまでの距離の和AD＋BD+CDの最小値を考えようとした。そこで Bob さんが実際に三角形を作り考えたところ、∠ＡＤＣ＝∠ＣＤＢ＝∠ＡＤＢ＝120° のとき最小値をとると予想した。

(1)∠BDC＝120° となるような点 D をコンパスと定規のみで作図しなさい。
(2)(1)に加え、線分ＣＤを一辺に持つ正三角形を辺BC側に作図したとき、△ＢＣＤと合同な三角形を答え、証明しなさい。
(3)Bob さんの予想を証明しなさい。

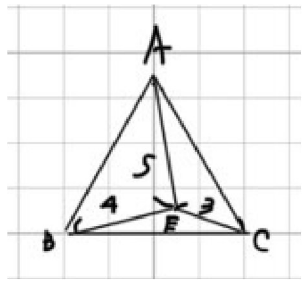


9.

正六角柱 ABCDEF―GHIJKL と一辺の長さが $6a$ の正四面体 OPQR がある。底面 ABCDEF と PQR は同一平面上にあり、AB は PQ 上、CD は QR 上、EF は RP 上にある。正六角柱の高さ x が 0 から $6a$ まで変化するとき、二つの図形の重なる部分の体積 V を表せ。

10.

右の三角形の面積を求めよ。(三角形 ABC は正三角形)



数学の問題　解答解説

1.

(1)$36+42=42+36=78$

78 回生の皆さんはご入学おめでとうございます

(2)$\frac{15}{7}-\frac{7}{15}=\frac{225-49}{105}=\frac{176}{105}\neq 0$

$\therefore 15\div 7\neq 7\div 15$

(3) a【引く】b はある数 a からある数 b を引くという意味であり、交換法則が必ずしも成り立つとは限らない。(a=b で成立)。対して a【マイナス】b はある数 a にある数 -b を足すという意味であり、どんな 2 数 a,b についても交換法則が成り立つ

与えられたものの表面をなぞるだけでなくその意味を考えることは、勉強だけでなく生きていく上で大切な能力である。この問題は、その意味を考えるという行為のキッカケとなるように作成した。

2.

(1) $a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right\}$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)$

$=1$

(2) $a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1^2+2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{4}-\frac{1^2-2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{4}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4\sqrt{5}}{4}\right)$

$=1$

(3) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=A,\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}=B$とおくと、

$a_{n+2}-(a_{n+1}+a_n)$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right\}-\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}+\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}(A^{n+2} - B^{n+2}) - \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(A^{n+1} - B^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(A^n - B^n)\right\}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}(A^{n+2} - B^{n+2} - A^{n+1} + B^{n+1} - A^n + B^n)$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\{A^n(A^2 - A - 1) - B^n(B^2 - B - 1)\}$

ここで、$A^2 - A - 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1$

$= \frac{6+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}-4}{4}$

$= 0$

同様に、$B^2 - B - 1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1$

$= \frac{6-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}-4}{4}$

$= 0$ だから、

$\frac{1}{\sqrt{5}}\{A^n(A^2 - A - 1) - B^n(B^2 - B - 1)\}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}(A^n \times 0 - B^n \times 0)$

$= 0$

よって、$a_{n+2} - (a_{n+1} + a_n) = 0$だから、$a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$　　　終

（4）　$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

$a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = 13$

$a_8 = a_7 + a_6 = 13 + 8 = 21$

$a_9 = a_8 + a_7 = 21 + 13 = 34$

$a_{10} = a_9 + a_8 = 34 + 21 = 55$

コメント

この問題に出てきた　$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$　はフィボナッチ数列の一般項です。

フィボナッチ数列にはいくつも美しい性質があるので、ぜひ調べてみてください！

3.

(1) 16 本の髪の毛があるので、中央値は小さい方から数えて 8 番目と 9 番目の髪の毛が属する階級の階級値の平均である。

中央値は、

$(9+11)\div 2=10$

より 8 番目の髪の毛は 8cm 以上 10cm 未満の階級に、9 番目の髪の毛は 10cm 以上 12cm 未満の階級に属することがわかる。

8cm 未満の髪の毛が 6 本あることから、8cm 以上 10cm 未満の髪の毛は 2 本あることがわかるので、アは **2** となる。

また、本数の合計から

イ+ウ+エ=16-(1+1+4+2+4)=4 ・・・①

平均を求める式から、

(1×0)+(3×1)+(5×1)+(7×4)+(9×2)+(11×イ)+(13×ウ)+(15×4)+(17×エ)

=11×16

であるから

(11×イ)+(13×ウ)+(17×エ)=62 ・・・②

ここで①の両辺を 11 倍すると

(11×イ)+(11×ウ)+(11×エ)=44 ・・・③

②-③より

(2×ウ)+(6×エ)=18

ウ+(3×エ)=9

ここで、ウ、エの組み合わせは

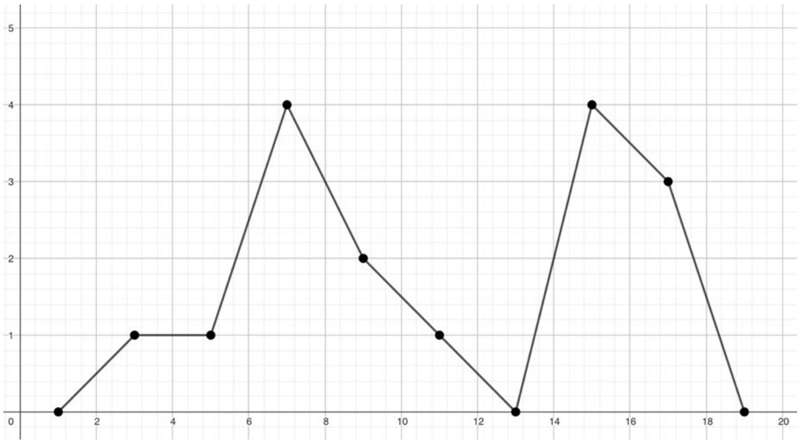
(ウ,エ)=(0,3),(3,2),(6,1),(9,0)

となるが、①からイ、ウ、エの合計が 4 より大きくなることはないので

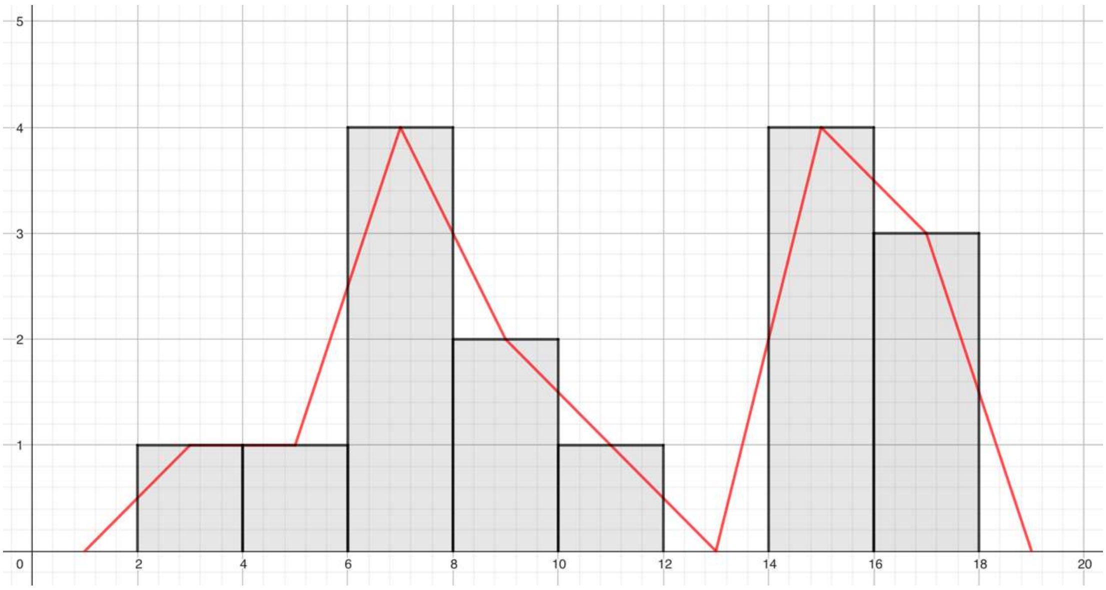
ウは **0**、エは **3** となる。

4-(0+3)=1 より、イは **1** である。

(2)



(3) 直接面積を求めることもできるが、計算が面倒くさい。一工夫するだけで劇的に簡単に求められる。



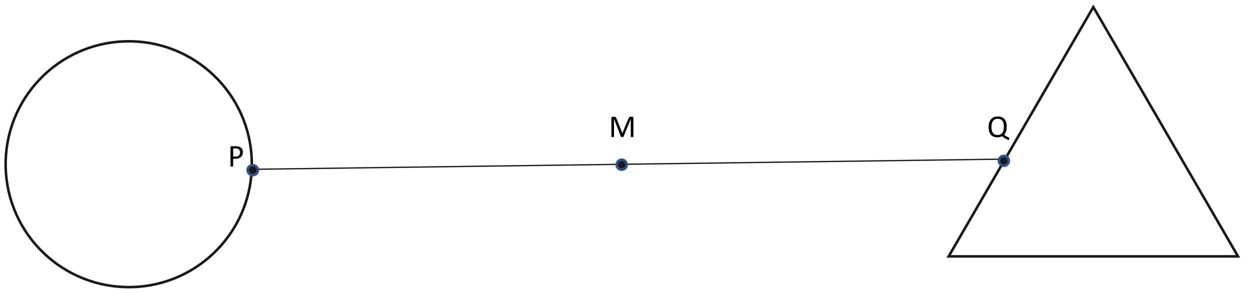
上のように、資料に対応するヒストグラムを書くと、その面積は求める面積と等しくなる。(証明略、合同な三角形がたくさんある)

各長方形の高さの和は、度数の合計より 16 である。

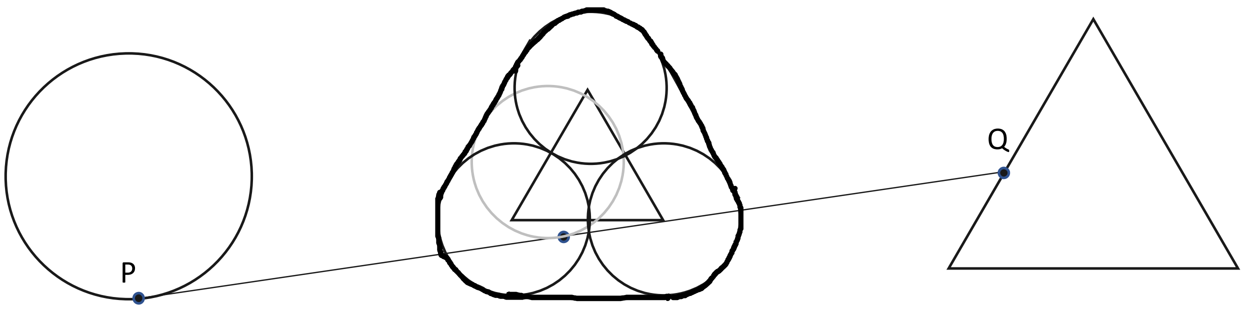
よって求める面積は、

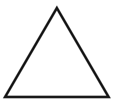
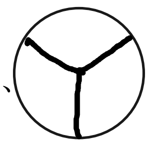
2×16=32cm

4. $\frac{\sqrt{3}+6+\pi}{4}$



求める点 M の軌跡は下図のようになる。



よって  、 ×3、 の和で求められるから、

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+1\times\frac{1}{2}\times 3+\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}+6+\pi}{4}$$

5.

(1) $\angle AHB = 72^\circ$, $\angle ABH = 36^\circ$ $\quad\therefore$ 2 倍

(2) $AC = x$ $\ CD = 1$ とすると △ABH∽△IAH∽△CAD より

$(x+1):x = x:1 \qquad \therefore\ x = \frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$

以下 $Z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする。

(3) (2)から((2)も同様だが)黄金比なので　$\mathbf{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$**倍**

(4)黄金比なので$\mathbf{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$**倍**

(5)$IH=1$とすると　$AH=Z$　$\mathrm{AB}=Z^2$　となる

　$正五角形ABCDE \backsim 正五角形FGHIJ$　より面積比は　$AB^2:IH^2=Z^4:1=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}:1$

　よって$\mathbf{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$**倍**

(6)$AB=1$とすると AB と PQ の相似比は$1^4:\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^4$

面積比は$1^8:\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^8$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^8=\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^4=\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2=\mathbf{\frac{47-21\sqrt{5}}{2}}\text{倍}$$

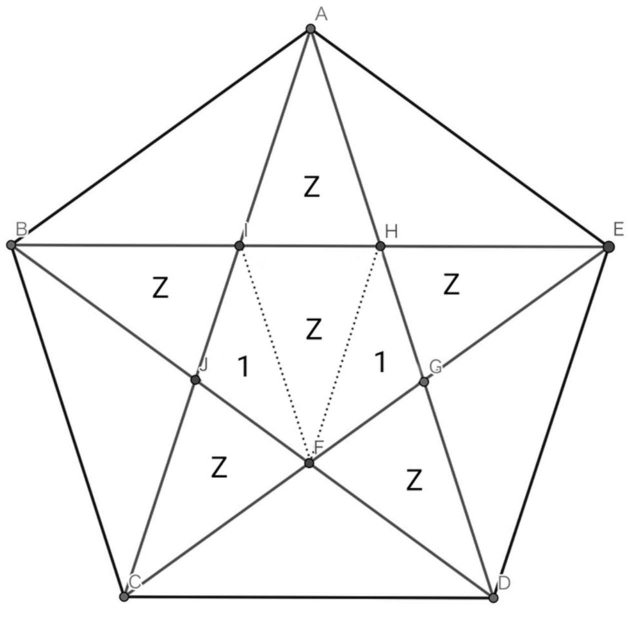
(7)$\triangle FGH=1$とすると右図の通り

　これより

$$\frac{星形AIBJCFDGEH}{正五角形FGHIJ}=\frac{(2+6Z)}{2+Z}$$

$$=1+\sqrt{5}$$

$\therefore \mathbf{1+\sqrt{5}}$**倍**



6.

(1)27 個の立方体から 7 個取り除くので、$\frac{20}{27}$倍

(2)操作前の立方体の一辺の長さを 3 a とすると、操作前の辺の長さの和は、

　3a×12＝36a。操作後は 36a+12a×5=96a よって$\frac{8}{3}$倍

(3)(1)より求める体積は $\left(\frac{20}{27}\right)^{\infty}$であり、問題文より$\frac{20}{27}<1$なので体積は0

辺の長さの和も同様にして$\frac{8}{3}>1$なので求める和は∞

(4)問題文より、∞回の操作をした図形にもう一度操作をするとできる20個の∞＋1回操作された図形は同じとにみなすことができる。よってFを20個集めると3倍大きなFと相似な図形を作ることができる。よって辺を3倍すると体積は20倍となるので問題文より、答えは3をβ乗したら20になる数。

(5) $3^{2}=9$、$3^{3}=27$より、$9<20<27$かつ$y=3^{x}$は単調増加だから

$3^{2}<3^{\beta}<3^{3}$となる。よって$2<\beta<3$となり、

2より大きく3より小さい整数はないのでβは整数ではない。

7.

△ABCの外接円とAMの延長の交点を点Dとする。すると△ABMと△ADCにおいて、

円周角の定理より∠ABM＝∠ADC、仮定より∠BAM＝∠DAC。

以上より△ABM∽△ADC。よってAB：AM＝AD：AC、またAD＝AM＋MD

よりAM^{2}＝AB・AC－AM・MDとなる。ここで、方べきの定理よりAM・MD＝BM・CMなのでAM^{2}＝AB・AC－BM・CM→①

また仮定より、BM＝BC・$\frac{AB}{AB+A}$、CM＝BC・$\frac{AC}{AB+AC}$。これらを①に代入すると

$AM^{2}=AB\cdot AC-BC^{2}\cdot\frac{AB\cdot AC}{(AB+A)^{2}}=AB\cdot AC\{1-\left(\frac{BC}{AB+A}\right)^{2}\}$

8.

(1)線分 AC を一辺とする正三角形 ACE を点 B と反対側に作図し、正三角形 ACE の外接円 O を作図する。このとき円 O の弧のうち△ABC の内部にある任意の点を D とすると四角形 ADCE は円に内接するから、∠ADC＝180° －∠AEC＝120° （図１）

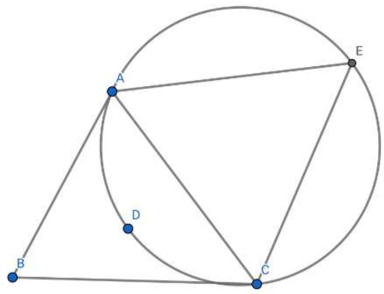


図 1

(2)△ADC と△AFE において、△ADF、△ＡＣＥは正三角形だから AD＝AF、ＡＣ＝ＡＥ。
また、
∠DAC=∠DAF－∠CAF=∠CAE－∠CAF=∠FAE
以上より二辺夾角相等なので
△ADC≡△AFE。(図２)

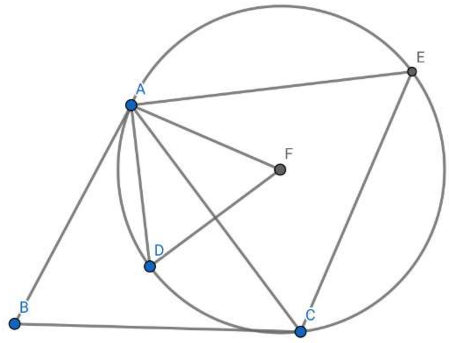


図 2

(3)(2)より CD＝EF,△ABF は正三角形だから
AD＝DF となり、
よって AD＋BD+CD＝DF+BD+EF となる。
なので AD＋BD+CD が最小となる、つまり DF+BD+EF が最小となるのは点 D、点 F が直線 BE 上にあるときとなる。ここで、
∠ADF＝∠AFD=60° なので
∠ADB＝180° －∠ADF＝120°
∠ADC＝∠AFE＝180° －∠AFD＝120°
∠BDC＝360° －（∠ADB＋∠ADC）＝120°
よって予想は正しい。(図３)

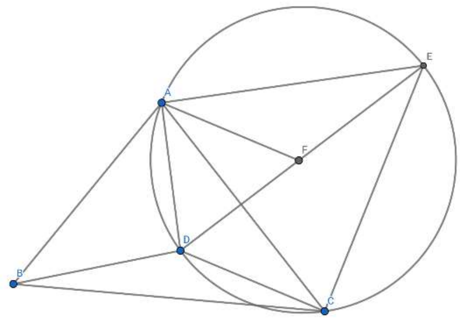
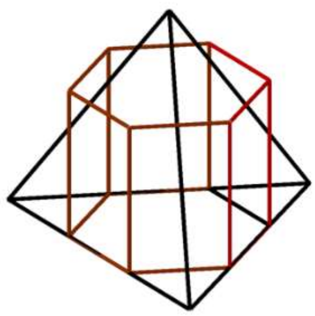


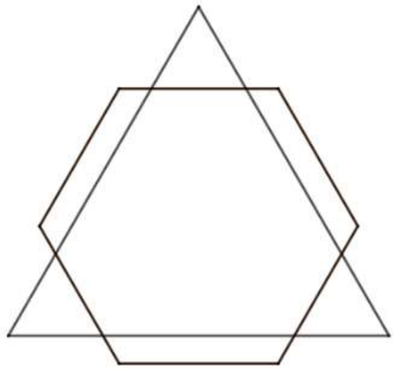
図 3

9.
物体は右図のようになる。
正六角柱の上側の底面での物体の切り口によって 3 通りに場合分けして考える。



（ⅰ）

正三角形の頂点が正六角形より外側にあるとき、正六角柱の高さは、$0 \leqq x \leqq \sqrt{6}a$ となり、この場合は高さ x の正六角柱から重なっていない切断三角柱３つの体積を引けばよい。



高さ x の正六角柱＝$6\sqrt{3}x^2$

切断三角柱＝$\frac{\sqrt{2}}{4}ax^2+\frac{\sqrt{3}}{72}x^3$

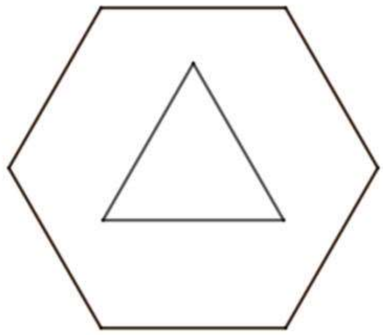
よって

$$V=\left(6\sqrt{3}x^2\right)-3\left(\frac{\sqrt{2}}{4}ax^2+\frac{\sqrt{3}}{72}x^3\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{24}x^3-\frac{3\sqrt{2}}{4}ax^2+6\sqrt{3}ax^2$$

（ⅱ）

正三角形の頂点が正六角形の内側にあるとき、正六角柱の高さは、$\sqrt{6}a \leqq x \leqq 2\sqrt{6}a$ となり、この場合は $x=2\sqrt{6}a$ のときの体積と高さが$\left(2\sqrt{6}a-x\right)$の正四面体の体積の差を考えればよい。



$x=2\sqrt{6}$ のとき V＝$\frac{51\sqrt{2}}{4}a^3+\frac{9\sqrt{2}}{4}a^3=15\sqrt{2}a^3$

正四面体＝$\frac{\sqrt{3}}{18}\left(48\sqrt{6}a^3-72a^2x+6\sqrt{6}ax^2-x^3\right)$

よって、

$$V=\left(15\sqrt{2}a^3\right)-\frac{\sqrt{3}}{18}\left(48\sqrt{6}a^3-72a^2x+6\sqrt{6}ax^2-x^3\right)$$

$$=7\sqrt{2}a^3+4\sqrt{3}a^2x-\sqrt{2}ax^2+\frac{\sqrt{3}}{18}x^3$$

（ⅲ）$2\sqrt{6}a \leqq x \leqq 6a$のとき、体積は変化しない。よって（ⅱ）の式に$2\sqrt{6}a$ を代入して

$$V=15\sqrt{2}a^3$$

となる。

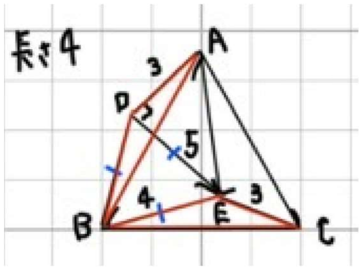
（ｉ）（ⅱ）（ⅲ）より

$$V = -\frac{\sqrt{3}}{24}x^3 - \frac{3\sqrt{2}}{4}ax^2 + 6\sqrt{3}ax^2 \qquad (0 \leqq x \leqq \sqrt{6}a)$$

$$V = 7\sqrt{2}a^3 + 4\sqrt{3}a^2x - \sqrt{2}ax^2 + \frac{\sqrt{3}}{18}x^3 \qquad (\sqrt{6}a \leqq x \leqq 2\sqrt{6}a)$$

$$V = 15\sqrt{2}a^3 \qquad (2\sqrt{6}a \leqq x \leqq 6a)$$

10.



正三角形 BED を作る。

$\angle DBE = \angle ABC = 60°$より、$\angle DBA = \angle EBC.$

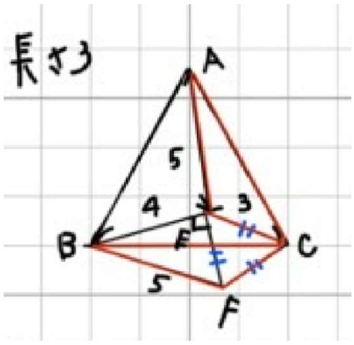
また、$AB = CB, DB = EB.$

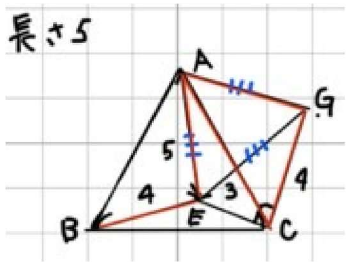
よって、二辺夾角相等より、$\triangle ADB \equiv \triangle CEB.$

よって、$\mathrm{AD} = 3.$

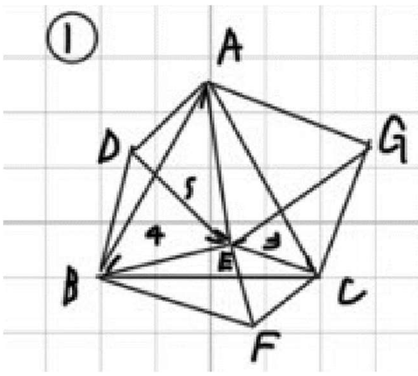
$\triangle ADE$は、$AD:DE:EA = 3:4:5$より、$\angle ADE = 90°.$

同様の操作を、長さ 3, 5 の辺に対しても行う（右図)。





これらの結果を合わせると①のようになる。



六角形 AGCFBD は、

$$\triangle AEB \equiv \triangle AGC$$

$$\triangle BEC \equiv \triangle BDA$$

$$\triangle \mathrm{AEC} \equiv \triangle BFC$$

$\triangle AEB + \triangle BEC + \triangle \mathrm{AEC} = \triangle ABC$より、

六角形 AGCFBD $= 2\triangle ABC.$

六角形 AGCFBD

$$= \triangle EFC + \triangle \mathrm{BDE} + \triangle AEG + \triangle \mathrm{AED} + \triangle FEB + \triangle ECG$$

$$= \frac{9}{4}\sqrt{3} + \frac{16}{4}\sqrt{3} + \frac{25}{4}\sqrt{3} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\cdot 3 \cdot 4\right) = \frac{25}{2}\sqrt{3} + 18$$

よって、

$$\triangle ABC = \frac{25}{4}\sqrt{3} + 9.$$

高校数学編

問題

$\boxed{\mathbf{1}}$

$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ について, $e < 2.72$ となることを証明せよ. ただし, $\dfrac{431}{600} = 0.718\dot{3}$ である.

$\boxed{\mathbf{2}}$

$s,\ t$ は実数 $(s > 0,\ s \neq 1)$ で, 曲線 $E : y = \log_s tx$ と曲線 $F : y = s^x + t$ の共有点は 2 つ存在し, そのいずれもが直線 $y = x + 3$ 上にある. それらの点のうち x 座標と y 座標がともに整数となる点の座標を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$

不定積分

$$\int \frac{1}{x \log x}\, dx$$

を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$

n を 2 以上の自然数とする．$0.625_{(10)}$ を n 進数の小数で表すと，小数第 2 位で終わり，各位の和が n であるという．n を全て求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$

x に関する 3 次方程式

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 8 = 0 \tag{i}$$

と, y に関する 4 次方程式

$$y^4 + 8y^3 + 3y^2 - 2y + 11 = 0$$

について考える.

ただし, (i) は実数解をただ 1 つもつという事実を証明せずに用いてよい.

(1) ある 3 つの実数 k, a, b に対し, $t = x + k$ とおくと, (i) は t に関する 3 次方程式

$$t^3 + at + b = 0 \tag{ii}$$

と同値になる. このような 3 つの実数 k, a, b の値を求めよ.

(2) 一般の 3 つの数 t, p, q に対し, $t^3 - 3pqt + p^3 + q^3$ を因数分解せよ.

(3) 一般の 3 つの実数 t, p, q に対し, $t = p = q$ でないとき, 不等式

$$t^2 - pt - qt + p^2 + q^2 - pq > 0$$

が常に成り立つことを示せ.

(4) (ii) について, ある 2 つの実数 u, v $(u > v)$ を用いて.

$$\begin{cases} -3uv = a \\ u^3 + v^3 = b \end{cases}$$

と表せる. このことを用いたときの u, v の値を求め, (i) のただ 1 つの実数解を求めよ.

$\boxed{\mathbf{6}}$

以下の (i), (ii) をともに満たす点全体によって構成される立体を P とする.

$$y^2 + z^2 \leqq 1 \tag{i}$$

$$\frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{2} + xz \leqq 1 \tag{ii}$$

このとき, P の体積を求めよ.

解答

$\boxed{\mathbf{1}}$

二項定理より、

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{n}\right) + {}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \cdots + \frac{n!}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots \frac{1}{n!} \quad (※1) \\
&< 2 + \frac{43}{60} + \frac{1}{6\cdot 120} + \cdots + \frac{1}{6\cdot 120^{k-5}} + \cdots + \frac{1}{6\cdot 120^{n-5}} \quad (※2) \\
&= 2 + \frac{43}{60} + \frac{1}{6\cdot 120}\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-5}}{1-\frac{1}{6}} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 2 + \frac{43}{60} + \frac{1}{600} = 2 + \frac{431}{600}.
\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{431}{600} = 0.718\dot{3}$ より, $e < 2.718\dot{3} < 2.72.$

※ 1

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k < \frac{n^k}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{k!}$$

を利用.

※ 2

$$\begin{aligned}
&6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\
&7! > 6^2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\
&8! > 6^3\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\
&\cdots \\
&k! > 6^{k-5}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1
\end{aligned}$$

を利用.

$\boxed{\mathbf{2}}$

(3, 6)

共有点の座標を $(k,\, k+3)$ とおくと，

$$k+3=\log_s tk \tag{i}$$
$$k+3=s^k+t \tag{ii}$$

となる．(i) より，$s^{k+3}=tk$．$s>0$ より，$s^3\neq 0$ なので，$s^k=\dfrac{tk}{s^3}$．

(ii) に代入して整理すると，

$$k(s^3-t)=(t-3)s^3. \tag{iii}$$

ここで，$s^3-t\neq 0$ と仮定すると，$k=\dfrac{(t-3)s^3}{s^3-t}$ となり，k の値が 1 つに定まるため，共有点が 2 つ存在することに矛盾する．よって，$s^3-t=0$．

(iii) に代入すると，$(t-3)s^3=0$．$s^3\neq 0$ であるから，$(s,\,t)=(\sqrt[3]{3},\,3)$．

(i) に代入すると，$k=3^{\frac{k}{3}}>0$．ここで，$f(k)=\dfrac{3^{\frac{k}{3}}}{k}$ とおくと，

$$\frac{f(k+1)}{f(k)}-1=\frac{3^{\frac{k+1}{3}}}{k+1}\frac{k}{3^{\frac{k}{3}}}-1=\frac{(\sqrt[3]{3}-1)k-1}{k+1}.$$

$1.4<\sqrt[3]{3}<1.5$ より，$f(1)>f(2)>f(3)=1<f(4)<f(5)<\cdots$．

よって，$f(k)=1$ を満たす整数 k は，$k=3$ のみ．

したがって，求める座標は，$\underline{(3,\,6)}$．

$\boxed{\mathbf{3}}$

$\log|\log x| + C \quad$ (C は積分定数)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\log x}\,dx &= \int \frac{(\log x)'}{\log x}\,dx \\ &= \underline{\log|\log x| + C}. \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

ただし, 公式

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を用いた.

$\boxed{\mathbf{4}}$

4

ある 0 以上 $n-1$ 以下の整数 $x,\ y$ に対して,

$$\frac{5}{8}=\frac{x}{n}+\frac{y}{n^2} \tag{i}$$
$$x+y=n \tag{ii}$$

が成立. (ii) を (i) に代入して,

$$\frac{5}{8}=\frac{x}{n}+\frac{n-x}{n^2}.$$

x について解くと,

$$x=\frac{5n^2-8n}{8n-8}=\frac{5}{8}n-\frac{3}{8}-\frac{3}{8n-8}.$$

すなわち,

$$8x=5n-3-\frac{3}{n-1} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{3}{n-1}=8x-5n+3.$$

右辺は整数だから, 左辺も整数. n は 2 以上だから, $n-1=1,\ 3$, すなわち, $n=2,\ 4$ が必要である.

- $n=2$ とすると, $(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ となるから, 不適.
- $n=4$ とすると, $(x,\ y)=(2,\ 2)$ となり, 題意を満たす.

以上より, $\underline{n=4}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$

(1) $(k,\ a,\ b)=(2,\ -3,\ 6)$

(2) $t^3-3pqt+p^3+q^3=(t+p+q)(t^2-pt-qt+p^2+q^2-pq)$

(3) 下を参照

(4) $x=-\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}-2$

---

(1) $t=x+k$ を (i) に代入すると,

$$(t-k)^3+6(t-k)^2+9(t-k)+8=0.$$

展開して整理すると,

$$t^3+(-3k+6)t^2+(3k^2-12k+9)t+(-k^3+6k^2-9k+8)=0.$$

t^2 の項の係数が 0 になることから, $-3k+6=0$. すなわち, $\underline{k=2}$. また, 上の式に代入すると,

$$t^3-3t+6=0$$

となるから, $\underline{a=-3,\ b=6}$.

(2) $t^3-3pqt+p^3+q^3=(t+p+q)(t^2-pt-qt+p^2+q^2-pq)$.

(3)

$$\begin{aligned}t^2-pt-qt+p^2+q^2-pq&=\frac{1}{2}(2t^2-2pt-2qt+2p^2+2q^2-2pq)\\&=\frac{1}{2}\left((t-p)^2+(t-q)^2+(p-q)^2\right)\\&\geq 0.\end{aligned}$$

等号が成立するのは, $t-p=t-q=p-q=0$, つまり, $t=p=q$ のときのみであるから, それ以外の時には,

$$t^2-pt-qt+p^2+q^2-pq>0$$

が常に成立する.

(4)

$$\begin{cases}uv=1\\u^3+v^3=6\end{cases}\quad \text{すなわち,}\quad \begin{cases}u^3v^3=1\\u^3+v^3=6\end{cases}$$

となる. 3 次方程式における解と係数の関係より, u^3, v^3 は w に関する 2 次方程式 $w^2-6w+1=0$ の 2 解（ただし, $u^3>v^3$）. すなわち,

$$\begin{cases}u^3=3+2\sqrt{2}\\v^3=3-2\sqrt{2}\end{cases}.$$

u, v は実数であるから,

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} \\ v = \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

u, v の定義より, (ii) は, $t^3 - 3uvt + u^3 + v^3 = 0$ と表せる. また, (2) より,

$$(t+u+v)(t^2 - ut - vt + u^2 + v^2 - uv) = 0$$

と変形できる. $u \neq v$ であるから, (3) より, 2 つ目の括弧内は常に正. よって, この方程式の実数解は, $t = -u - v$. 以上より, 元の方程式 (i) の実数解は,

$$x = (-u-v) - k = \underline{-\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} - 2.}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$

$\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

平面 $y=k$ で P を切断したときにできる平面について考える.

与えられた不等式に $y=k$ を代入して整理すると,

$$z^2 \leqq 1-k^2$$
$$(x+z)^2 \leqq 2(1-k^2)$$

よって, $|k|>1$ のとき, 断面は存在せず, $-1 \leqq k \leqq 1$ のとき, 断面は以下の 2 つの不等式を満たす点全体によって構成される図形である.

$$-\sqrt{1-k^2} \leqq z \leqq \sqrt{1-k^2}$$
$$-x-\sqrt{2-2k^2} \leqq z \leqq -x+\sqrt{2-2k^2}$$

ゆえに, $-1 \leqq k \leqq 1$ のとき, P を平面 $y=k$ で切断してできる断面は, 頂点の座標がそれぞれ $((-1\pm\sqrt{2})\sqrt{1-k^2},\ \sqrt{1-k^2})$, $((1\pm\sqrt{2})\sqrt{1-k^2},\ -\sqrt{1-k^2})$ である平行四辺形であるので, その面積を $S(k)$ とすると,

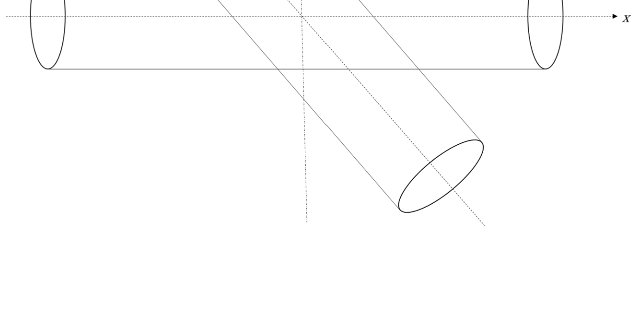
$$S(k)=2\sqrt{2}\times\sqrt{1-k^2}\times 2\sqrt{1-k^2}=4\sqrt{2}(1-k^2)$$

したがって, 求める体積を V とすると,

$$V=\int_{-1}^{1} S(k)\,dk=\underline{\frac{16\sqrt{2}}{3}}.$$

（補足）

立体 P は, 半径が 1 の 2 つの円柱を斜めに組み合わせてできる立体である. （下図はイメージ. 見やすさのために y 軸は省略.）



あとがき

いかがだったでしょうか。部誌の内容を全て理解することは難しいかもしれませんが、わからない部分があったとしても、少しでも数学の美しさを感じていただけたなら部誌を作成した甲斐があります。

さて突然ですが、最近では ChatGPT や Bard などの新たな対話型 AI の登場が常に話題の中心に上がるようになり、数学をすることの重要性がますます上がった気がします。ついに自分の要望に合わせた形で回答が返ってくるようになり、ますます便利な社会に変わっていくと思われますが、それに伴って、AI の利用の場面が増え、私たちの存在価値が徐々になくなっていっているのもまた事実です。幾度となく言われてきましたが“クリティカルシンキング”（情報を多角的に考え、常に問い続ける）の姿勢でこれらの AI と向き合うことが大切であることは言うまでもありません。それは何も AI が依然信頼に欠けるからだけではありません。最近よくニュースで論文を書く際にこれらの AI を禁止する動きがあると耳にしますが、一度世に出たものを完全に無くすことは不可能ですし根本的な解決になっていませんよね。AI が書いたものをそのまま使おうと思う、使うことになる要因には、それが一見筋の通っていて、批判の余地がない、つまり“考えない”のでなく“考えられない”ことになっているということがあるのではないでしょうか。

根拠を持って批判、使用すること。ジャンルは多少違えどこのことは、数学を解く際の思考に共通するものがあると思います。AI の精度が上がるとそれほどロジックがしっかりしているため、より考えることが多くなりますし複雑になります。検索することまでは誰でもできますので、その人の存在価値は、それをどう扱うかのところで決定することになります。だいぶ生きづらくなったなと思いました。A I に飲み込まれず、共生するためにも数学はもっと学ぶ必要があるなあと感じた今日この頃です。

長くなりましたが、今回の文化祭で、私たち７６回生は間もなく引退を迎えます。ですが、場所は変われど考え続けることには変わりありません。それは後輩の皆さんも同じで、彼らが今後ますます活躍できることを願って文章を終わります。これからも数学研究会の応援をよろしくお願いいたします。ありがとうございました。

リーダー　眞鍋洋平

数学研究会紹介

数学研究会員　令和５年（2023）年　４月　１日 現在

３年　リーダー　　眞鍋洋平

副リーダー　石﨑朱

３年メンバー

伊藤真　　尾崎翔将　河原大智

木下裕貴　工樂瑛友　山端優宏

２年メンバー

前場雄晴　古川仁翔　平松拓海

番場大誠　柳澤昭宏　吉岡稜太郎

山本大智　神﨑亮志　宮下透

岡野和子　西崎俊介　内田龍之介

毎週水曜日　放課後学習室 B または 1-9, 2-9, 3-9 で活動しています。見学などは活動中ならば、いつでも大歓迎です。

数研のサイト http://seika.ssh.kobe-hs.org/cat/60/ita/12
（学校のホームページの一部です。資料を利用される際は、カテゴリ表示に記載されているルールに基づいて利用をお願い致します。）

Twitter @Jinkou_Suuken
https://twitter.com/jinkou_suuken
Instagram @integral_math_club
https://instagram.com/integral_math_club
YouTube チャンネル
https://www.youtube.com/channel/UCtS2K5eTlOIyQ80utcVfgag

この「SSH KOBE.H.S. MATH JOURNAL」の発行に際して、助力いただいた先生方、査読をしてくださった先輩方、本当にありがとうございました。

令和 5 (2023)年 5 月 1 日 発行
編集・制作 兵庫県立神戸高等学校 数学研究会