

歪像画の射影変換

- 円柱アナモルフォーズについて -

神戸高校総合理学科 2年9組 齊藤 玲央 向 麻里 森野 はるか

概要...

平面鏡は像をありのままの姿を映し出すが、曲がった鏡では必ず歪んでしまう。どのように絵を描けば、歪みのない絵が映るのか？
そこで私たちは、円柱アナモルフォーズについて**数学的観点**から考えていくことで、歪みのない絵を映そうとした。
本研究は、
【虚像と実像の関係式を導き出す→正確なセグメント格子枠の作成
→綺麗な絵を映すためのアナモルフォーズを実際に描く
という流れである。

アナモルフォーズ... 適当な鏡に投影したり、斜めにしたりすることで、もとの形に再構成される画像。(実像)
セグメント格子枠... 鏡に像を映したときに正方格子の虚像が見えるように描かれたアナモルフォーズ。扇形状になる。これをもとにして絵を描くため、これが正確である必要がある。

目的...

1. 点R(実像)の座標を式で表す
2. 求めた式から正確なセグメント格子枠を作成する
3. “綺麗な”(=歪みのない)絵を映し出す！

設定...

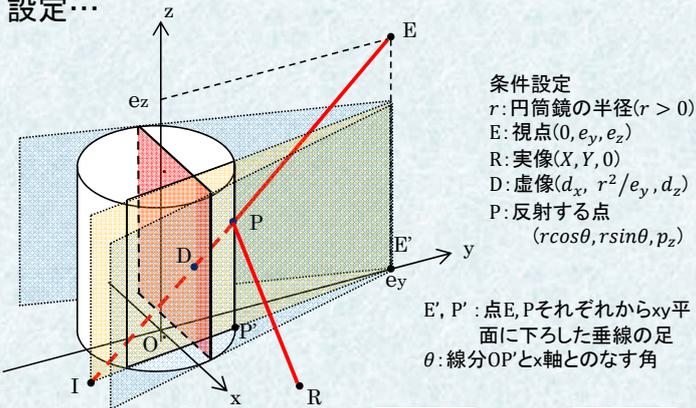


図1 斜視図

$$(-r\sqrt{1-r^2/e_y^2} \leq d_x \leq r\sqrt{1-r^2/e_y^2})$$

$$(0 \leq p_z < e_y) \quad (e_y > r, e_z > 0)$$

虚像は円筒鏡の表面に映っている
 虚像は図1の赤い平面(極平面)上に映っている
 点Pの軌跡を調べるのではなく、点Dの軌跡を調べることにした。

点Dと点Rの関係式...

ここで求める式は虚像(点D)と実像(点R)の関係式であり、点Dを1つ決めると点Rが1つ決まるものである。
 私たちは鏡の反射を利用して、 $X \cdot Y$ を r, e_y, e_z, d_x, d_z の5文字のみを使った式で表した(ここでは求めた式は省略)。

オリジナルの式

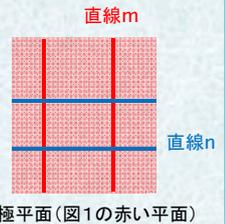
円筒鏡の半径 r と視点 E を定めて、映したい点 D の x 座標と z 座標を設定することで、点 R (実像)の座標を求めることができる。

この式ができたことで、虚像(点)が映るときの実像(点)の座標を求めることが可能になった。また、媒介変数表示により、虚像に直線が映るとき、実像はどのような軌跡を描くのか、ということもわかった。

式からセグメント格子枠を作成する...

(i) 極平面に、 z 軸に平行な直線 m を映すとき
 直線 m は、 d_x を一定にした点の集合である。

(ii) 極平面に、 x 軸に平行な直線 n を映すとき
 直線 n は、 d_z を一定にした点の集合である。



(i) 映す直線ごとに
 d_x に数値を代入する
 (図2では $d_x = \pm 2, \pm 4, \pm 6$)。

(ii) 映す直線ごとに
 d_z に数値を代入する
 (図2では $d_z = 0, 2, 4, 6, 8, 10$)。

設定値 $r = 7.8, e_y = 100, e_z = 50$ を代入。

$X \cdot Y$ は d_z のみで表される。

$X \cdot Y$ は d_x のみで表される。

d_z を媒介変数として
 $X \cdot Y$ のグラフが描ける！

d_x を媒介変数として
 $X \cdot Y$ のグラフが描ける！

図2は、円筒鏡の内部に一辺2の正方格子が見えるように、(i)と(ii)を重ね合わせた図である。

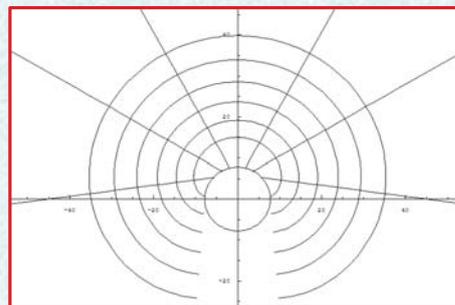


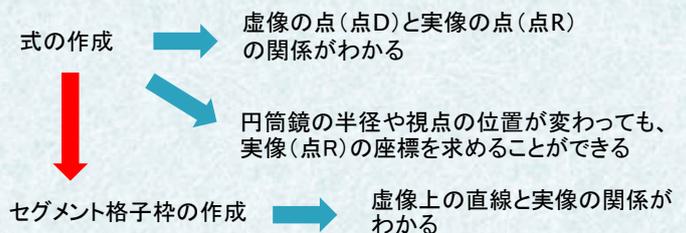
図2 扇形状セグメント格子枠

図2において、
 曲線が(i)のグラフ
 直線が(ii)のグラフ
 である。
 曲線は、外側のグラフほど間隔が広いことがわかる。

結果・考察...

図2の扇形状セグメント格子枠で極平面に正方格子枠の虚像を映すことができた。これをもとにして正確な絵を描くことができる。
 図2のグラフは原点を中心とする同心円状ではないため、設定した視点以外から見ると極平面の格子枠は歪みを生じてしまう。

研究の必要性...



セグメント格子枠をもとにして、正確なアナモルフォーズが描ける！！

今後の展望...

- ・計算途中のものを仕上げる。
- ・鏡に直線以外の図形を映すとき、また立体的な絵を映すとき、どのような実像を描けばよいのかを調べる。