歪像画の射影変換

－　円柱アナモルフォーズについて　－

齊藤　玲央　　向　麻里　　森野　はるか
兵庫県立神戸高等学校　総合理学科２年

私たちが毎日のように見る鏡はありのままの姿を映し出す。では、もしその鏡が変形していたら私たちの目にはどう映るだろうか。だまし絵に興味を持った私たちは、円柱アナモルフォーズを研究の題材とし、視点を固定した場合の実像と鏡に映る虚像の関係を計算して求めた。

1.　はじめに

1.1.　アナモルフォーズとは

図を射影変換により、識別しがたいほどひどく変形させた画像である。 その画像は斜めにしたり、適当な鏡に反射させたりすることでもとの形に再構成される。

1.2.　概要

円柱アナモルフォーズは、ゲルト・ディットマースの「デンマーク王フレデリク３世と王妃ゾフィー・アマリエの肖像」などの作品に使用された手法だが、この作品の虚像の両端は歪んで見えた。

本研究は、歪んだ部分を解消するために、円筒鏡と視点を座標空間上に固定し、歪めて描いた像（実像）と鏡に映った像（虚像）の関係式を導き、実像を描くための扇形状セグメント格子枠を作成した。

2.　検証方法と結果

2.1.　条件設定

検証を進めるにあたり、円筒鏡を座標空間上において考えた。

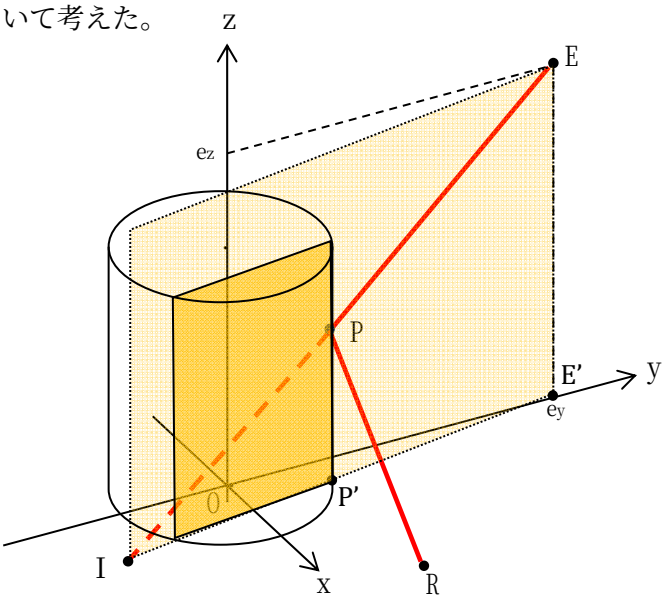

図１ 条件設定

半径 r（>0）の円筒鏡の底面の中心を、xy 平面上の原点 O にくるように置く。そのとき、z 軸が円筒鏡の中心線となる。

視点を yz 平面上の点 E $(0, e_y, e_z)$ $(e_y > r, e_z > 0)$ とする。

また、円筒鏡で光が反射する点を点 P、点 P から平面に下ろした垂線の足を点 P'とおく。線分 OP'と x 軸の正の向きとのなす角のうち劣角を θ、点 P の z 座標をp_z（$0 \leqq p_z < e_z$）とおくと、点 P は（$r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ p_z$）となる。

直線 EP と xy 平面との交点を点 I（$s, t, 0$）、点 P'における底面の円の接線に関して点 I と対称な点を点 R（$X, Y, 0$）とおく。

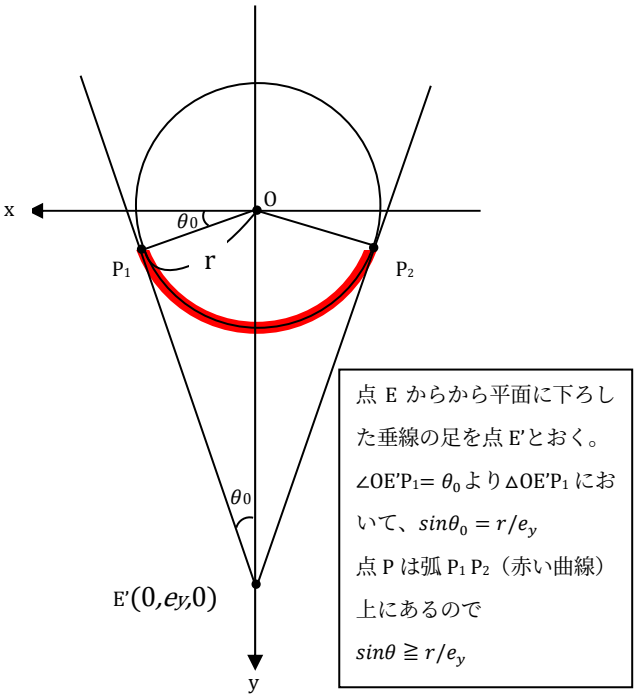

図２ 図１を xy 平面上で見た図

2.2.　点Pと点Rの関係

点 I は線分 EP をe_z：p_zに外分する点だから$s =$

$$\frac{e_z r\cos\theta}{e_z - p_z}\ ,\quad t = \frac{-e_y p_z + e_z r\sin\theta}{e_z - p_z} \quad \cdots ①$$

以降 xy 平面について考える。

★

点 P'における接線の方程式は

$$rxcos\theta + rysin\theta = r^2$$

r(≠0) より　$xcos\theta + ysin\theta = r$　…②

整理すると　$y = -\frac{1}{tan\theta}x + \frac{r}{sin\theta}$

点 I を接線②に関して対称移動させると、次の(ⅰ)(ⅱ)を満たす。

(ⅰ)　点 I と点 R の中点が接線②上にある。

(ⅱ)　直線 IR が接線③と垂直だから、直線 IR の傾きが$tan\theta$

(ⅰ)において、点 I と点 R の中点を点 M とすると、点 M は　$(\frac{x+s}{2}, \frac{y+t}{2})$　とおける。

点 M は接線②上にあるので、

$\frac{(x+s)cos\theta}{2} + \frac{(y+t)sin\theta}{2} = r$　…③　が成り立つ。

(ⅱ)において、直線 IR の傾きは　$\frac{y-t}{x-s}$

接線②の傾きは$-\frac{1}{tan\theta}$より

$$\frac{y-t}{x-s} = tan\theta \quad \text{…④}$$

③④の連立方程式を解く。…⑤

⑤に、①を代入して整理すると、θとp_zの値を設定すれば X, Yの値を求めることができる。しかし、実際に絵を描くときにθの値を設定することは難しい。また、p_zが一定でθを変化させたとき虚像は直線に見えなかった。(計算には Mathematica 使用)

2.3. 条件を追設定

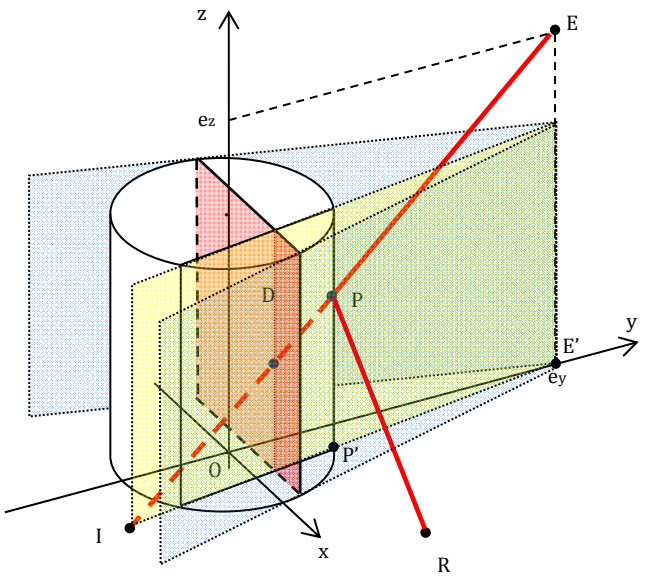

図 3 条件を追設定した図

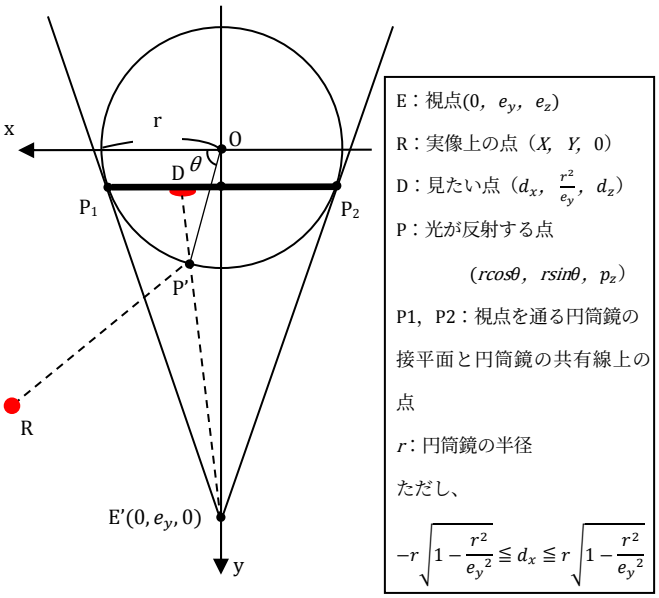

図 4　図 3 を xy 平面で考えた図

視点から見える虚像は円筒鏡の表面に映っていると考えていたが、実際は、虚像は図 4 の黒太線（P1, P2 を通り、xy 平面に垂直な平面）上に映っていた。図 3 では赤い平面上である。この平面を以後、極平面と呼ぶ。

視点 E から見たときに点 R が極平面上の点 D に見える。

2.4. 点Dと点Rの関係

格子枠を作成するにあたり、極平面上に虚像が映るように設定したときの、点 D と点 R の関係式を求めることにした。変化させる点 D の座標の値を媒介変数として表示することとする。ただし、極平面上の直線は、z 軸に平行な直線と x 軸に平行な直線を考えることとする。

ここで、まず点 D と点 R の関係から式をつくる。
X, Yを$cos\theta, sin\theta$を使って表す。
相似を利用して、sとtをd_x, d_zで表す。

$$s = \frac{d_x e_z}{-d_z + e_z}, \quad t = \frac{d_z {e_y}^2 - r^2 e_z}{e_y(d_z - e_z)} \quad \cdots ⑦$$

『★と同様』
⑤に、⑦を代入する。

$$X = \{2(d_z e_y r cos\theta - d_z {e_y}^2 cos\theta sin\theta + 2e_z r^2 sin\theta - e_z e_y r cos\theta) + (1 - 2sin^2\theta) d_x e_y d_z\} / \{e_y(d_z - e_z)\} \quad \cdots \boxed{1}$$

$$Y = \{2e_y sin\theta(d_z r - e_z r + e_z d_x cos\theta) + (1 - 2sin^2\theta) d_z {e_y}^2 + (1 - 2cos^2\theta) e_z r^2\} / \{e_y(d_z - e_z)\} \quad \cdots \boxed{2}$$

$cos\theta$, $sin\theta$ の値を求める。

図 5 より点 P'は直線 ED と円 O の交点のうち、x 座標（$rcos\theta$）が O に近い方である。

直線 E'D'の方程式は　$y = -\frac{(e_y{}^2 - r^2)}{d_x e_y} x + e_y$　…⑧

円 O の方程式は　$x^2 + y^2 = r^2$　…⑨

⑧ ⑨の連立方程式を解き、$x = rcos\theta$、$y = rsin\theta$ を代入し、それぞれ r($\neq 0$) で割ると $cos\theta, sin\theta$ の値が求められる。

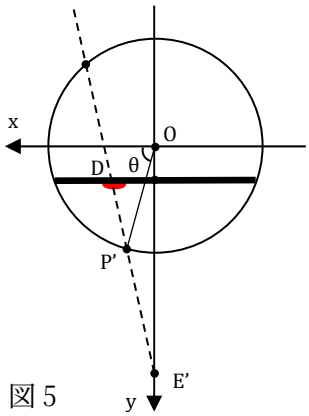

図 5

[1] $d_x > 0$ のとき

$$sin\theta = e_y/r + (e_y{}^2 - r^2)\{-e_y(e_y{}^2 - r^2) + \sqrt{(e_y{}^2 - r^2)(r^2 e_y{}^2 - r^4 - d_x{}^2 e_y{}^2)}\} / \{r(e_y{}^2 - r^2)^2 + d_x{}^2 e_y{}^2\} \quad \cdots ③$$

$$cos\theta = \{d_x e_y{}^2 (e_y{}^2 - r^2) - d_x e_y \sqrt{(e_y{}^2 - r^2)(r^2 e_y{}^2 - r^4 - d_x{}^2 e_y{}^2)}\} / \{r(e_y{}^2 - r^2)^2 + d_x{}^2 e_y{}^2\} \quad \cdots ④$$

[2] $d_x < 0$ のとき

$sin\theta$は③と同じ

$$cos\theta = \{d_x e_y{}^2 (e_y{}^2 - r^2) + d_x e_y \sqrt{(e_y{}^2 - r^2)(r^2 e_y{}^2 - r^4 - d_x{}^2 e_y{}^2)}\} / \{r(r^2 - e_y{}^2)^2 + d_x{}^2 e_y{}^2\} \quad \cdots ④'$$

① ②に、③ ④ ④'を代入すると、X, Yは r, e_y, e_z, d_x, d_zだけで表すことができる。つまり視点 E を定めて、点 D の x 座標と z 座標を設定することで点 R の座標を求めることができる。

[3] d_x =0（$\theta = 90°$）のとき

yz 平面上で考える。

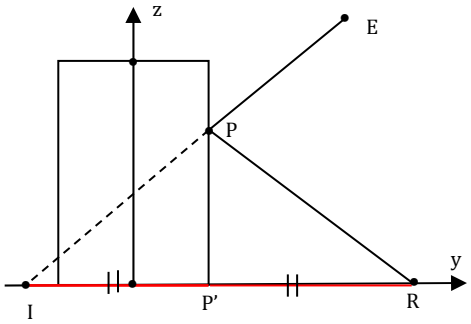

図 6 $\theta = 90°$のとき

P($rcos\theta$, $rsin\theta$, p_z) で、$\theta = 90°$ だから P$(0, r, p_z)$となる。3 点 E, P, I は同一直線上にあり、直線 PI は yz 平面上にある。

よって、点 P の z 座標を変化させたときの点 I の軌跡は y 軸上となる。

従って点 I を点 P の接平面(直線 PP')に関して対称移動した点 R の軌跡は $X = 0$　$(Y \geqq r)$ となる。

2.5. 計算した点のプロット

Excel で点 R の値を計算し、AR-CAD というソフトを用いて実際にプロットした。

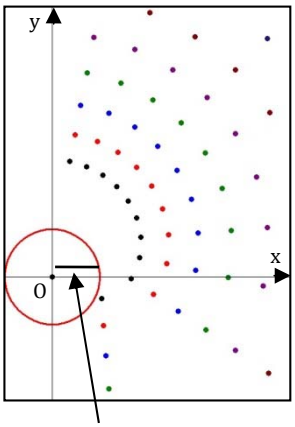

図 7 極平面上の格子点を射影変換して xy 平面上にプロットした図

$e_y = 100, e_z = 50, r = 7.8$ のとき、

$0 \leqq d_x \leqq r\sqrt{1 - \frac{r^2}{e_y{}^2}}$ の範囲を 10 等分する点をプロットした。

3. 点Rの軌跡のグラフ

〔i〕極平面に、x 軸に平行な直線を映すとき

x 軸に平行な直線は、d_zを一定にしたときの点 D の集合である。この式にあらかじめ設定した、r, e_y, e_z, d_zの値を代入すると、d_xを媒介変数とした関数となり、X, Yのグラフが描ける。

〔ii〕極平面に、z 軸に平行な直線を映すとき

z 軸に平行な直線は、d_xを一定にしたときの点 D の集合である。この式にあらかじめ設定した、r, e_y, e_z, d_xの値を代入すると、d_zを媒介変数とした関数となり、X, Yのグラフが描ける。

ここでd_zの範囲を求めるために zx 平面における相似で考える。

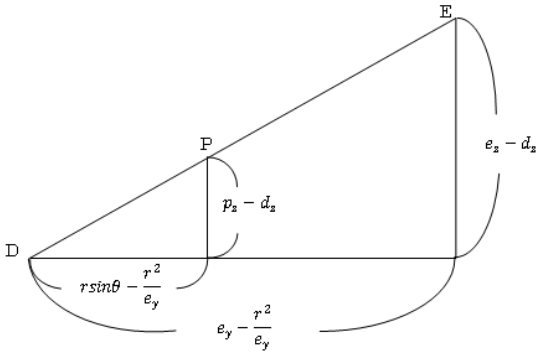

図 8 直線 ED を含み、xy 平面に垂直な平面

図 8 より

$$\left(rsin\theta - \frac{r^2}{e_y}\right):(p_z - d_z) = \left(e_y - \frac{r^2}{e_y}\right):(e_z - d_z)$$

これを解き、$sin\theta$に$\boxed{3}$を代入する。

$$d_z = \{(p_z - e_z)\left(r^4 + {d_x}^3{e_y}^2\right) + e_y\left({e_y}^3 p_z - 2r^2 p_z + e_z r^2 e_y\right) - e_z e_y \sqrt{\left({e_y}^2 - r^2\right)\left(r^2{e_y}^2 - r^4 - {d_x}^2{e_y}^2\right)}\} / \{{e_y}^2\left({e_y}^2 - r^2\right) - e_y\sqrt{\left({e_y}^2 - r^2\right)\left(r^2{e_y}^2 - r^4 - {d_x}^2{e_y}^2\right)}\}$$

私たちは半径$r = 7.8$、高さ 20 の円筒鏡を考え、視点の位置を$e_y = 100, e_z = 50$に設定した。円筒鏡の高さは 20 であるため、p_zの範囲は $0 \leqq p_z \leqq 20$ であり、d_zはp_z=0 のとき最小でp_z=20 のとき最大となる。

極平面上に正方格子が見えるように、〔i〕と〔ii〕のグラフを重ね合わせたものを図9に示した。

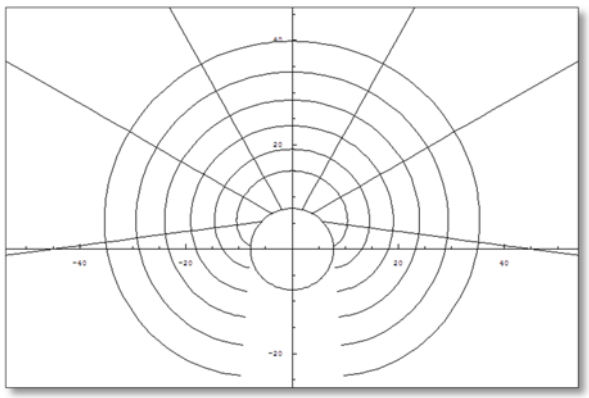

図9〔i〕では$d_z = 0,2,4,6,8,10$、〔ii〕では$d_x = \pm 2, \pm 4, \pm 6$のときの点Rの軌跡である。

4. 結果

点Dと点Rの関係式より、点Rの軌跡は

・点Dをx軸に対して平行に動かしたときは曲線

・点Dをz軸に対して平行に動かしたときは直線

となる。（図9参照）

私たちは、図9の扇形状セグメント格子枠で、極平面上に正方格子枠の虚像を映すことができた。

5. 考察

求めた式から作成した扇形状セグメント格子枠を円筒鏡に映すと、設定した視点から見ると極平面上に正方格子枠が映る。

もし、図9が原点を中心とする同心円状であれば、設定した視点以外の点から見たときも極平面上に正方格子枠が映るはずである。

しかし、図9は原点を中心とする同心円状ではないので、設定した視点以外の点から見ると極平面上の格子枠には歪みが生じる。

6. 今後の展望

円柱アナモルフォーズにおいて、視点を設定して実像と虚像の関係を導き出すことで、扇形状セグメント格子枠を作ることに成功した。同様にして、円錐アナモルフォーズ等の扇形状セグメント格子枠を作成したい。

7. 謝辞

本研究を進めるにあたりご指導してくださった先生方、並びに中間発表などでアドバイスを下さった方々にこの場を借りてお礼申し上げます。

[参考文献]

井村 俊一. 円筒鏡アナモルフォーズの作図法について--歴史的見地から種々の作図法についての検証を主として.金沢美術工芸大学紀要/金沢美術工芸大学編..(50)2006.29~44 ISSN0914-6164
http://ci.nii.ac.jp/naid/110004830196