『破壊の科学（Distribution of Fractal）』

ー　自然数の分割とシミュレーションによる考察　ー

荒牧　孝洋　　岡村　みのり　　金田　和子　　下村　侃　　鳥居　真人　　平林　大輝　　宮本　悠史
兵庫県立神戸高等学校　総合理学科２年

破壊とは難解な現象であり、物理的視点からその真相に迫ることは難しい。そこで、破壊の結果生まれた破片の大きさの分布に注目し、逆問題的に破壊現象に迫った。2 次元物体の破壊を説明する数理モデルを作成した結果、分布は指数分布を示し、実際にビスケットを木槌で破壊した結果も指数分布を示した。また指数分布を示すシミュレーションの作成にも成功した。よって、破壊現象を説明する十分条件的なモデルを提示できたといえる。

1.　目的

破壊とは、様々な要素が複雑に絡んで起こる非常に難解な現象である。均質な物体を、均等な力で破壊しても、同じ破片が出てくることはない。このことは物理的視点から破壊の真相を探ることは困難であることを意味する。

では、破壊とは完全にランダムな現象なのだろうか。答えは否である。マンデルブローは、岩石を破砕するとき、その破片の大きさの分布はべき分布になることを発見した。ファインマンは、スパゲッティを折ったとき、半分にならずほとんどの場合は 3 つのかけらになることに気が付いた。私たちは、このような破壊のランダムさの中に潜む規則性に、数学的視点から逆問題的に迫ることを目標とする。

2.　概要

物体を“ 破壊する ”とは、言い換えれば、小さな破片に“ 分ける ”ことである。そこで私たちは、自然数を自然数の和の形に“ 分けて ”表すことで、破壊現象の数理モデル化ができるのではないかと考えた。また、作成した数理モデルを用いて破壊現象を説明するため、実際に破壊実験を行った。さらにモデル化の別の手段として、シミュレーションも作成することにした。

3.　自然数を用いた数理モデル

本章では、自然数の分割という概念をもとに、2 次元的物体の破片の大きさの分布を調べることにする。

3.1.　自然数の分割

本節では、自然数の分割という概念について考察をする。そこで、まず分割について定義する。

〈定義〉

自然数 n の分割とは、n を自然数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ ($\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_r$) の和の形として表すことである。

ここで注目して欲しいのは、項を左から大きい順に並べるという制約である。このとき、その表し方の総数を分割数と呼び、p(n)で表す。また、値が k の項を単に k の項と呼ぶことにする。

n=4 のときを例に挙げる。

4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1…①

①式より、p(4)=5 であることが分かる。

3.1.1. n の分割数 p(n)の値

以下に 1≦n≦10 の場合の値を表 1 に示す。

n	1	2	3	4	5
p(n)	1	2	3	5	7
n	6	7	8	9	10
p(n)	11	15	22	30	42

表 1:p(n)の値

3.1.2.　k の項の項数

本節では、新たに P(n,k)という値を定義する。

〈定義〉

ある自然数 n を分割し、全ての表し方を書き並べたとき、k の項の項数を P(n,k)と表す。

ここでも n=4 のときを例に考えると、①式より、

P(4,1)=7,P(4,2)=3,P(4,3)=1,P(4,4)=1

となる。簡単にいうと、①式中の 1,2,3,4 の個数をそれぞれ数えることになる。

ここで、一般に P(n,k)の値を求めるために、次のように場合分けして考える。

(ⅰ) n-k<k 即ち $\frac{n}{2}<k\leqq n$ のとき

n の分割を、次のようにはじめから k の項を一つ固定して考える。

$$\left.\begin{aligned} n &= k + (n-k) \\ &= k + (n-k-1)+1 \\ &\ \ \vdots \\ &= k + 1+1+\cdots+1 \end{aligned}\right\} \boxed{p(n-k)\text{個}}$$

n-k<k より、はじめに固定した k の項以外に k は現れない。

よって、残る n-k の分割について考えると、その表し方は p(n-k)通りあり、その各々に 1 つずつ k の項が含まれるので、　$P(n,k)=p(n-k)$

(ⅱ) n-k≧k 即ち $1\leqq k\leqq\frac{n}{2}$ のとき

(ⅰ)と同様に、k の項を一つ固定して考える。

$$\left.\begin{aligned} n &= (n-k) + k \\ &= (n-k-1)+1 + k \\ &\ \ \vdots \\ &= 1+1+\cdots+1 + k \end{aligned}\right\} \boxed{p(n-k)\text{個}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(n-k,k)\text{個}}$$

ここで、上の表記では、右側の項が左側の項より大きくなる場合が出てくるが、これは便宜上の表記であり、その順序を考慮して並べ替えると、重複なくただ一通りに決まるので、問題はない。

n-k≧k より、はじめに固定した k の項 p(n-k)個のほかに、残る n-k の分割中にも k は現れる。n-k の分割中に含まれる k の項の項数は P(n-k,k)と表せるので、　$P(n,k)=P(n-k,k)+p(n-k)$

(i)、(ii)より、

$$\begin{cases} \frac{n}{2}<k\leqq n \text{ のとき } P(n,k)=p(n-k) \\ 1\leqq k\leqq\frac{n}{2} \text{ のとき } P(n,k)=P(n-k,k)+p(n-k) \end{cases}$$

3.2.　円の分割モデル

本節では、2 次元的物体として、円における破片の大きさの分布を考察する。まずは破壊のルールを定義する。

〈ルール〉

1)面積 n(n は 2 以上の自然数)の円を n 等分するような n 本の半径が割れ目の候補としてあるものとする。

2)その中から r 本が実際に切断されるものとする。このとき、どの半径の組み合わせが切断される事象も同様に確からしいものとする。

3)生じた破片の大きさは面積で定義し、k とおく。

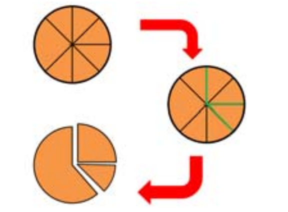


図 1:円の分割モデル

図1にこのモデルのイメージ図を示す。

3.2.1.　自然数の分割と割れ目の選び方

本節では、円の分割モデルにおける破片の大きさを、分割の概念から発展させて考える。

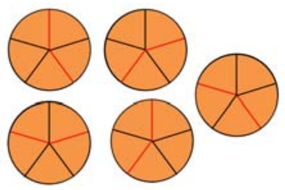


図 2:割れ目の選び方

具体的に、n=5 のときの 3+2 に対応する割れ目の選び方を考えてみると、図 2 の 5 通りがある。

このように、分割の表し方が 1 つに決まっても、割れ目の選び方は 1 つに決まるとは限らない。

n=5 のときを例に考えると表 2 のようになる。ただし、5 という分割の表し方は破壊が起こらないため除外するものとする。

分割の表し方	割れ目の選び方
5	除外
4+1	5通り
3+2	5通り
3+1+1	5通り
2+2+1	5通り
2+1+1+1	5通り
1+1+1+1+1	1通り

表 2:分割の表し方

3.2.2.　破片の大きさの分布

本節では、新たに G(n,k)という値を定義する。

〈定義〉

破壊は必ず起こるものとし、起こり得る全ての割れ目の選び方で破壊が起こった際、生じる大きさ k の破片の個数を G(n,k)と表す。

表 2 より、

$G(5,1)=1\times5+2\times5+1\times5+3\times5+5\times1=40$

$G(5,2)=1\times5+2\times5+1\times5=20$

$G(5,3)=1\times5+1\times5=10$

$G(5,4)=1\times5=5$　　となる。

ここで、一般に $G(n,k)$ の値を次のようにして求める。

まず、n 本の割れ目の候補である半径に、時計回りに 1,2,3,…,n-1,n 番の番号をつける。(図 3)

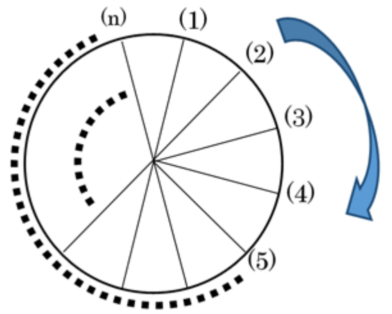


図 3：G(n,k)の値の決め方

ここで、大きさ k の破片のうち、1 番と k+1 番の半径が切断され、2 番から k 番の半径は、切断されないでできた(1 番と k+1 番の半径に挟まれた)ものに注目すると、切断されるか否かが確定していないのは、k+2 番から n 番の n-k-1 本であるから、このときの大きさ k の破片の個数は、

2^{n-k-1} 個

2 番と k+2 番、3 番と k+3 番、…、n 番と k 番の半径に挟まれたものについても同様に考えると、求める大きさ k の破片の総数は、

$G(n,k)=n\times 2^{n-k-1}$…②

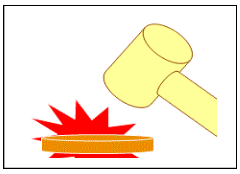
②式より2次元的物体の破壊における破片の大きさの分布は、指数分布となる。

4.　2 次元の破壊実験とシミュレーション

前章で作成した数理モデルを用いて破壊現象に迫るため、実際にビスケットを割って実験を行う。また、数理モデルとは別のモデルとしてシミュレーションを作成し、その結果表れる分布についても調べた。

4.1.　ビスケットの破壊実験

4.1.1.　手順(木槌で割る)



直径 6cm のビスケットをラップで覆い、中心に向かって底面の直径 3.7cm の木槌を、支点と振り下ろす角度を 60 度に固定して静かに手を離して倒し、木槌の底面とビスケットの表面がちょうどぶつかるようにほぼ一定の衝撃を与える。

4.1.2.　実験結果

ヒストグラムを見たところ、べき分布か指数分布のいずれかになることが考えられる。そこで、ヒストグラムの両対数グラフと片対数グラフをとり、どちらがより直線に近いかを考察する

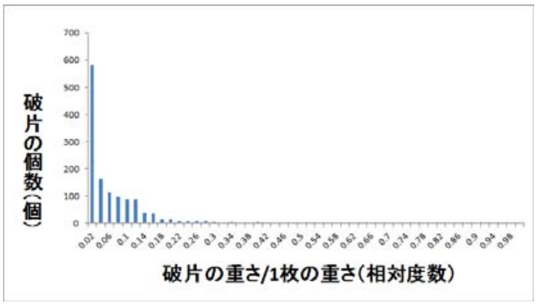


図 4:破片の大きさの分布(木槌)

4.1.3.　検証

片対数グラフより、指数分布だと考えられるが、両対数グラフと片対数グラフのどちらがより直線に近いかを正確に判断することができていないので、直線近似度を何らかの数値で出すことができれば正確に判断することができると考える。その方法は今後検討していきたい。

4.2.　2 次元シミュレーション

4.2.1.　2 次元シミュレーション I

〈ルール〉

1)空間の中心から半径 20 セルの円状にビスケットの生地を配置する。(図 5)

2)中心にひびを 2 個から 11 個の範囲でランダムに出現させる。

3)ステップ毎に 60%の確率で 1 セル直進し、それぞれ 20%の確率で左右に 45 度向きを変えて 1 セル直進する。（図 6）

4)ステップ毎に A%の確率で自分と同じ位置にひびを 1 つ生み出す。新しく生まれたひびの向きは、それぞれ等確率で元のひびと同じ、または元のひびから左右に 45 度向きを変えたものとなる。（図 7）

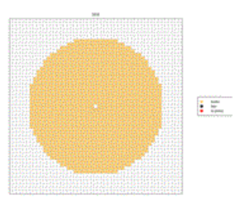


図 5:初期時

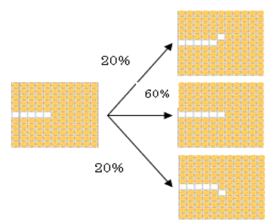


図 6:ひびの進み方

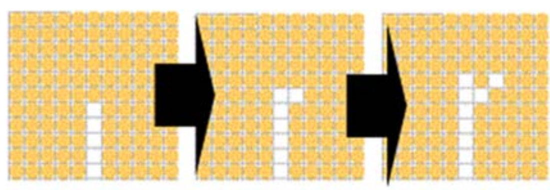


図 7:ひびの分岐の仕方

4.2.1.1.結果Ⅰ

A%を 5%、10%として、それぞれ 500 回ずつ試行した。5%結果を図 8 に示す。

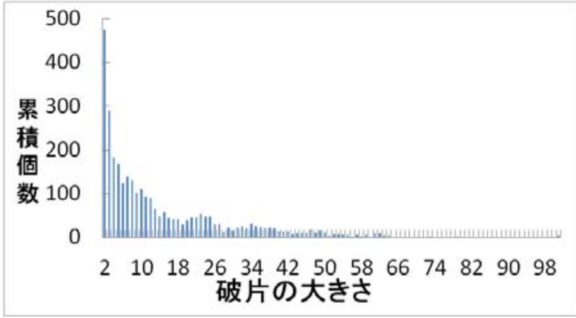


図 8:5%500 回試行

片対数グラフより、指数分布に近いと考えられるが、ここでも正確な検証には至っていないため、今後検討したい。

4.2.2.　2 次元シミュレーションⅡ

本節では別のシミュレーションを作成した。

〈ルール〉

1)100 枚のパネルを縦 10 枚、横 10 枚の正方形状に並べ、パネルの１枚１枚それぞれについて A%の確率で色を塗る。

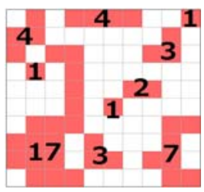


図 9:シミュレーション例

2) 4 近傍で繋がった色が塗られたパネルを破片とみて、その大きさを集計する。

4.2.2.1.結果Ⅱ

A%を 30%、40%、50%、60%、70%、80%と変え、それぞれ 5,000 回ずつ試行した。以下に特徴的な A＝30 のときのヒストグラムを示す。

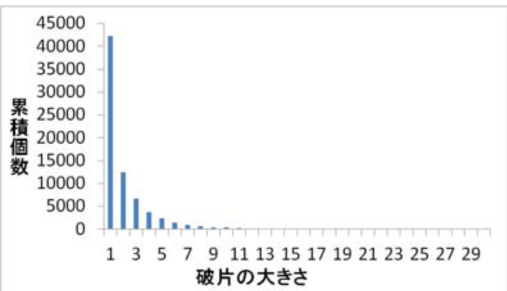


図 10:30%5,000 回試行

片対数グラフを用いると、A%が 50%以下のとき破片の大きさの分布は指数分布を示していることが分かった。また A%を 60%より大きくすると、極端に大きな破片が１つといくつかの小さな破片、という結果が現れやすくなり、グラフの右側に山を示すようになる。

4.3.　2 次元の考察

破壊実験の結果表れた指数分布という結果は、数理モデルの結果と一致している。シミュレーションの結果も指数分布を示し、実験結果と一致した。よって、これらのモデルは破壊現象を表す十分条件的なモデルであるといえる。

5.　結論

最初に述べた逆問題とは一体どういうものなのか。破壊に潜むメカニズムを解明しようとする際、いきなり物体を破壊した時の内部での変化について考えることは、いわゆる順問題である。そこで、生じた破片の方に目を向けて、内部における見えない破壊過程を推察しようと考える。これが逆問題である。

このとき大前提として、破壊方法は固定する。今回は、「木槌をふりおろす」という部分である。一定の条件の下で多数回行った実験データの累積から、破片の大きさの分布に着目した。今回は整数論を用いてその分布に迫ろうと考え、自然数の分割という概念から発展させた数理モデルにおいて、P(n,k)、G(n,k)という新たな値を定義し、一般化に成功した。また、このモデルが示した分布は、破壊実験の結果に一致していた。これは、破壊過程を示す十分条件である。同様にシミュレーションを作成することにも成功し、複数個の十分条件を提示できた。

今回、発見、構築したモデルで破壊の真相をすべて説明できるわけではなく、いくつかの例に過ぎないが、その例を示せたことが大きな成果なのである。

6.　今後の展望

現段階では、十分条件であるモデルを、定性的に示すことにとどまっているが、定量的な関係を導かなければ完全な逆問題とはいえない。最初にあえて逆問題「的に」と表現したのもこのためである。

今後は、明確な定量化とさらなるモデルの構築、また、指数分布を示すシミュレーションの中で一瞬現れるべき分布の現象について考察していきたい。

[参考文献]

[1]マークブキャナン『歴史は「べき乗則」で動く』PP73-78（ノンフィクションハヤカワ文庫）2009 年 8 月

[2]数学文化 021『スパゲッティをめぐる旅』PP65-79（日本評論社）2014 年 3 月

[3]ジョージ・アンドリュース、キムモ・エリクソン『整数の分割』PP57-71（数学書房）2006 年 5 月