

メトロノームの同期現象

— Synchronization of Metronome —

兵庫県立神戸高等学校 総合理学科 2年

先行研究より、メトロノームが同期するという事は、揺れている複数のメトロノームの針の座標の変化が等しい、という事が判明している。我々は今回の実験で台の上に置かれた複数のメトロノームを揺らしている様子を撮影した。撮影した映像を1フレームずつ画像解析して、台の上で揺らしたメトロノームが同期するまでのメトロノームの針の座標の変化を追った。

1. はじめに

2つのメトロノームを自由に動く台の上で揺らせると、針の振れが一致するに至る同期現象が知られている。他にも心臓細胞の律動、蛍の発光間隔、ペットボトル振動子等、色々な同期現象が報告されている。このような同期現象に対して、数学的なアプローチが可能であるかという事に対して、大変興味を抱いた。今回、私たちは実験が容易なメトロノームの同期現象に対して、数式を用いてその原理の解明を目的とする。

先行研究では、ラグランジュの運動方程式を用いてシミュレーションを作成し、数式によってのみメトロノームの同期現象を表そうとしているが、本研究では実際の実験を解析する方法と蔵本モデルを用いたシミュレーション、数式によって同期現象を解明しようとする方法との二つの方法でアプローチする。

2. 研究方法

2.1. メトロノームの同期の実験

・使用器具

- 黒色の画用紙
- 蛍光色のマークシール (直径 16mm)
- 台板(幅 1200mm, 奥行き 300mm, 質量 1550g, 亜鉛合金製)
- メトロノーム (NIKKO metronome Standard) 8個
- 呼び径 100のパイプの継ぎ手2個(長さ 103mm)
- ハイスピードカメラ (CASIO EXILIM-F1)
- カメラスタンド (SLICK 社製)

・準備

メトロノームの針の座標の変化を確認する為、針の一部を画像解析によって抽出する。その為、針の一部に蛍光色のシールを貼る。動いているメトロノームの針の先端を抽出するために、針の先端にマークシールを貼る。さらに、実験中に台自身も動く

ため、台にも座標の基準としてマークシールを貼る。なお、点(シール)の抽出の際、メトロノーム本体と台による光の反射が邪魔になるので、予めメトロノーム本体と台の撮影で映る部分は黒の画用紙で覆う。



図1 実験道具

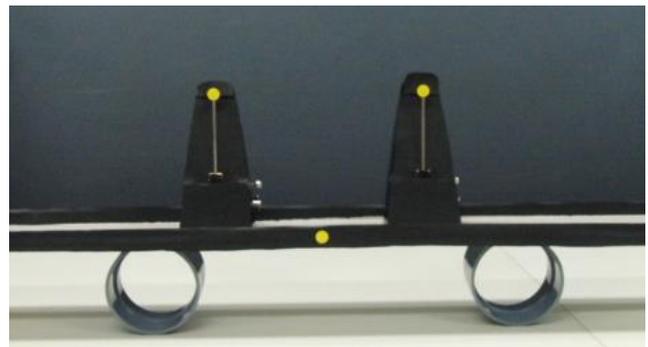


図2 実験風景

・実験方法

図2の状態それぞれメトロノームをTempo200に設定した状態で揺らす。2つのメトロノームが同期する過程を300FPSに設定したハイスピードカメラで撮影する。

・画像解析

300FPSに設定したハイスピードカメラで撮影した動画から1コマずつの連続画像を作成する。連続画像からマークシールのみを抽出する為、連続画像

それぞれに対して、黄色い画素と赤い画素を抽出し、各点のx座標を抽出する。これらの座標点を用いて、メトロノームの同期する過程を時系列でグラフ化する。一連の画像処理はPythonによって行う。

2.2. 同期現象の数式化によるシミュレーション

メトロノームの同期現象に関しては運動方程式を用いたシミュレーションが行われている[1][2][3]。今回私たちは、蔵本モデル[4]と呼ばれる同期現象の数式を用いて、メトロノームの同期現象の解明に取り組む。2つの振動子が相互作用する場合、以下の連立微分方程式を用いて同期現象を考える。

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 - k \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 - k \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

ここで、 θ_1 、 θ_2 は、それぞれ振動子1、2の位相、 ω_1 、 ω_2 はそれぞれ振動子1、2の角速度である。今回はメトロノームのTempoを振動子の角速度と考える。

2つのメトロノームの同期の実験と同様に、振動数をTempo208と設定し、蔵本モデルを用いて、C言語にてプログラミングを行い、メトロノームの同期現象のシミュレーションを行う。

3. 実験結果

3.1. メトロノームの同期の実験

メトロノームの同期現象を撮影した動画から、連続画像を作成し、画像処理を行ってグラフ図3,4,5を作成した。グラフの横軸は経過フレーム数、縦軸はメトロノームの針の運動を単振動とみなした場合の位相 θ の正弦である。図3,4,5において、赤い線と緑の線はメトロノームの針の動きを表し、青い線はそれらの位相差を表す。

メトロノームの動きに注目すると、図4では動きがずれているが、図5では動きはほぼ一致している。一方、位相差に注目すると、図4に比べ、図5では位相差が小さくなっているがある値に収束していないことが読み取れた。このことから見た目にはメトロノームの動きが完全に一致し同期しているように見えるが、実際にはそうでないことが分かった。

3.2. 同期現象の数式化

3.2. 1シミュレーションの為のkの導出

今回の実験系でのシミュレーションを行うため、蔵本モデルの式におけるkの値を、以下の方法より求めた。グラフよりframe数13035にて2つのメトロノームが同期し、動画は300FPSで撮影したので、

43.45秒後に同期したと考えた。2つのメトロノームの初期位置は撮影した画像からそれぞれ、 0° と 41° と読み取った。kの値と同期に必要な時間(frame数)は反比例の関係にあり、シミュレーションを行い、この関係を用いて計算した結果、 $k = 0.1635$ という値を得た。

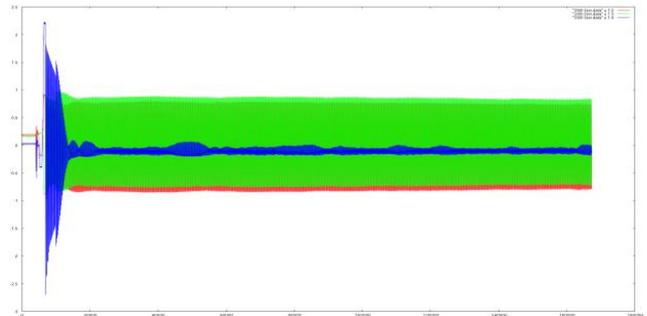


図3 同期開始から同期終了までのメトロノームの針の位相と位相差



図4 48秒後から50秒後までのメトロノームの針の位相と位相差

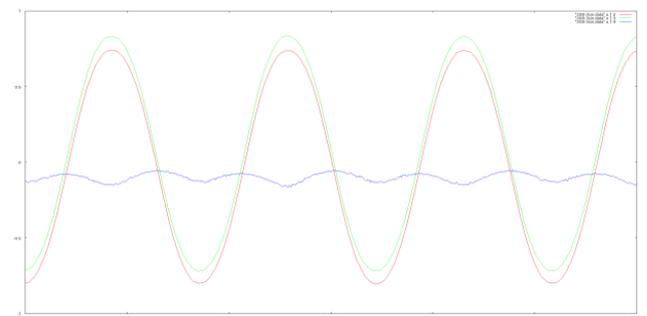


図5 500秒後から502秒後までのメトロノームの針の位相と位相差

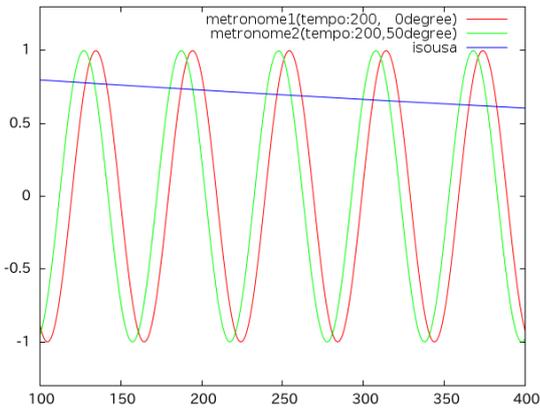


図 6 同期前の位相と位相差

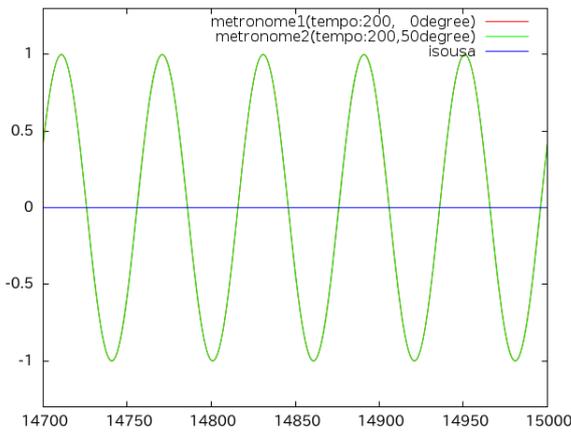


図 7 同期後の位相と位相差

4. 考察

4.1. 理論的 k の導出について

蔵本モデルを用いるにあたって、今回の実験系における蔵本モデルの同期係数 k を理論的に求めようとした。

k を求める過程は、まず実験によって得られた連続した画像を 2 枚取り出しその画像における振動子の位相 θ を求める。ただし、今回 θ は円運動における位相を表すので、実際のメトロノームの中心からの角度を θ' 、メトロノームの針の長さを r 、メトロノームの振幅を直径とする円の半径を R とすると位相 θ と θ' の関係は $R\sin\theta = r\sin\theta'$ より $\sin\theta = \frac{r}{R}\sin\theta'$ と

なる。 $\frac{d\theta}{dt}$ は振動子の速さを表すので、連続した 2 枚の

画像の位相の差を求め、今回は 300fps のカメラを使用したので 300 倍することで求められる。ゆえに、

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 - k \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2), \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 - k \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

において k 以外の部分が求まるので k の一次方程式として求まる。しかし、今回は位相を求めるときに画像を印刷し、位相を手動で調べた事等、誤差が大きく生じ、 $k=4.54$ という本来あり得る k の値から大きく

ずれてしまった。ゆえに上記の「実験結果」にも示したとおり、今回 k の値はシミュレーションと実際の実験の結果が合うように求めた $k = 0.1635$ という値を用いてすべてのシミュレーションを行った。

今回の実験で用いた $k = 0.1635$ という値において、文献 [4] によると、 $|\omega_1 - \omega_2|$ が $|2k|$ より大きくなると同期は起こらないとされている。つまり、計算した結果、今回の私たちの実験系では、メトロノームの Tempo の差が 6.246 より、小さければ、同期が起きることが示唆される。

4.2. 振動子の個体数別の同期現象パターン数

振動子の個体数別の同期現象のパターン数について考察する。

先に述べたように、振動子が 2 つの時の同期のパターンは、同位相で同期する場合と逆位相で同期する場合の 2 通りが考えられる。では、振動子が 3 つ以上での同期にはそれぞれ何通りのパターンがあるのだろうか。

我々は、一連の考察により一つの仮説を立てた。

「同期が生じるパターン数は、振動子の個体数の約数に等しい」というものだ。この仮説は蔵本モデルによって説明することができる。 n 個の振動子の同期を表す方程式

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \omega_i + k \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (i=1, 2, 3 \dots n)$$

において、

$n=3$ のとき

図 9②より $\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{2\pi}{3}, \theta_3 = \frac{4\pi}{3}$ なので、代入して計算すると

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \omega_1, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \omega_2, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial t} = \omega_3$$

このとき、 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ なので、図 9②の 3 つの振動子は同期している。

よって $n=3$ のとき、図 9①の同位相の同期と含めて 2 通りのパターンが存在する。

$n=4$ のとき

図 10②より $\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = \pi, \theta_4 = \frac{3\pi}{2}$ なので、

代入して計算すると

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \omega_1, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \omega_2, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial t} = \omega_3, \quad \frac{\partial \theta_4}{\partial t} = \omega_4$$

従って、図 10②の 4 つの振動子は同期している。

また、図 10③より $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = \pi, \theta_4 = \pi$

であるから、代入して計算すると

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \omega_1, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \omega_2, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial t} = \omega_3, \quad \frac{\partial \theta_4}{\partial t} = \omega_4$$

従って、図 10③の 4 つの振動子は同期している。

よって $n=4$ のとき、図 10①同位相の同期と含めて 3 通りのパターンが存在する。

このようにして蔵本モデルから考察を進めると、同期が生じるパターン数は、振動子の個体数の約数に等しいということが示唆された。

5. 結論

メトロノームの同期する実験を行い、それを高解像度カメラで撮影し、コンピュータ処理を経て、メトロノームの同期の様子をグラフ化した。また、その結果から蔵本モデルの式において、2 つの振動子の影響の大きさを示す定数 k の値を同定し、その値を用いてシミュレーションを行った。その結果同様の同期現象が確認した。

6. 今後の展望

蔵本モデルを用いて、メトロノームが 3 つの場合の同期現象のシミュレーションプログラムを作成している。初期位相の違いによって、各メトロノームの位相差の誤差の収束値が複数得られた。すなわち、同期の仕方が複数存在することを示唆している。また、3 つ以上のメトロノームの同期に対して、各メトロノームの位相差の誤差の収束値の個数の規則について考察中であり、現段階では、各メトロノームの位相差の誤差の収束値の個数は、メトロノームの個体数の約数の個数と一致するのではないかと考えている。これらの推測が実際のメトロノームの同期において、確認できるか実験を行っていくことが今後の課題である。

7. 謝辞

本論文は神戸高校総合理学科において、福岡正朗教諭のご指導の下に行った研究をまとめたものです。この研究を遂行するにあたり、福岡教諭からメトロノームの同期現象に携わるきっかけをいただいたとともに、丁寧かつ熱心なご指導をしていただきました。謹んで感謝の意を表するとともに、厚く御礼申し上げます。

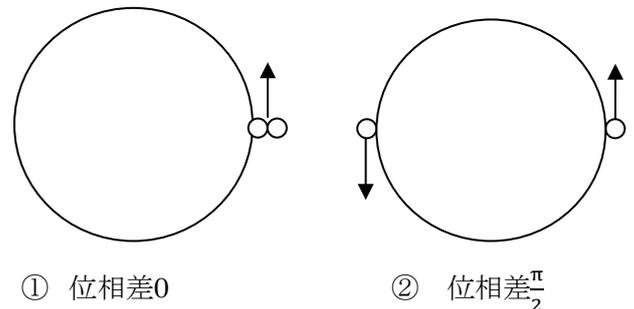
また、京都大学大学院生の方、関西学院大学工学部の大崎浩一教授は、発表時に数学分野における思慮深い助言を与えてくださいました。深く感謝を申し

上げます。

最後に本研究に対し、ご協力いただいた全ての皆様に深く感謝申し上げます。謝辞とさせていただきます。

[参考文献・参考URL]

- [1] 久保雄輝(2013)「メトロノームの同期現象」(龍谷大学 2012 年度修士論文)
- [2] 三崎洋平(2013)「メトロノームの同期現象」(龍谷大学 2012 年度卒業論文)
- [3] 中野里奈(2014)「メトロノームの同期現象に対する解析」(関西学院大学 2013 年度卒業論文)
- [4] 伊達章(2010)「メトロノームの同期現象+」



② 図 8 $n=2$ の同期パターン

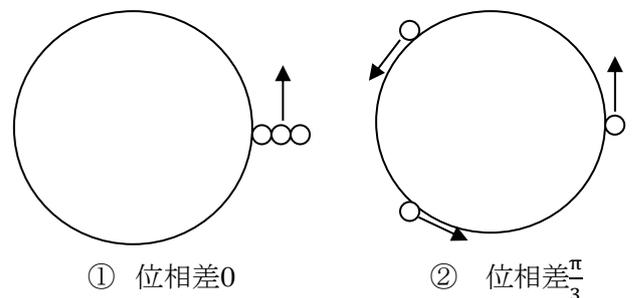


図 9 $n=3$ の同期パターン

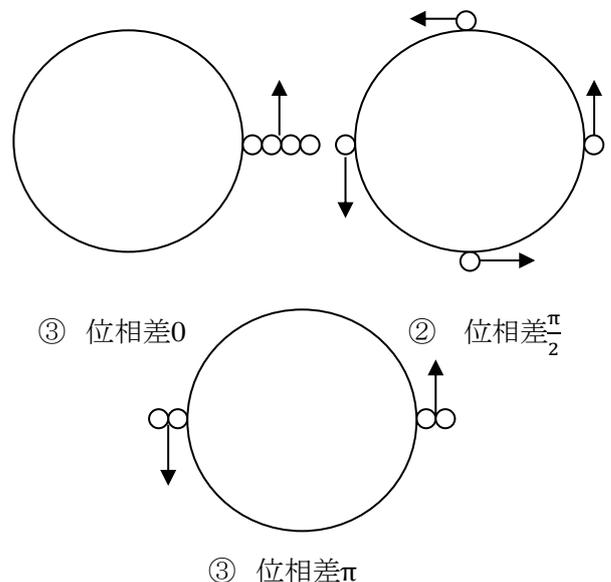


図 10 $n=4$ の同期パターン