新しい方程式について～方程式の次数の拡張～

総合理学科2年
澤 志遠　麦 恒輝　久保 丈

0. はじめに

この世界には様々な方程式が存在する。
我々が扱う方程式の変数の次数はほとんどの場合整数に限られる。しかし世の中には整数が次数でないものも存在する。その顕著な例がオイラーの等式 $e^{i\pi}=-1$ である。この美しい等式には次数に虚数単位i、円周率 π を含む。ここから我々はその次数が整数でない方程式について興味を持ち、それについて調べてみることにした。

1. x^aの定義

まずは x^aの定義を行う。そのため図形Lを導入する。L は $\mathrm{L}=[\sqcup C_k|\mathrm{k}\in z]$,
$C_k=[(\mathrm{r},\theta+2k\pi)\in R^2|\mathrm{r}>0,0\le\theta<2k\pi]$
なる集合とする。またx_kを絶対値$|x|$,
偏角$\theta+2k\pi$のC_k（⊂ L）に含まれる数とする。
この時、

$$x_k=|\mathrm{x}|(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi))$$
$$=e^{\log|x|+i(\theta+2k\pi)}\quad なので$$
$$(x_k)^a=e^{a(\log|x|+i(\theta+2k\pi))}$$

と定義される。
またこのとき任意の整数i,jにたいして$x_i=x_j$であるが
$(x_i)^a=(x_j)^a$とは限らない。
たとえば

$$(x_0)^{\frac{1}{2}}=|x|\left(\cos\frac{1}{2}\theta+i\sin\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$(x_1)^{\frac{1}{2}}=|x|\left(\cos(\frac{1}{2}\theta+\pi)+i\sin(\frac{1}{2}\theta+\pi)\right)$$

より$(x_0)^{\frac{1}{2}}\neq(x_1)^{\frac{1}{2}}$

ここで同伴解という言葉について定義する。
ある一変数方程式Fに対して、その解の一つであるx_sに対してある自然数t(t>s) が存在して $F(x_s)=F(x_t)=0$ となるとき、x_tをx_sに対する同伴解と呼ぶ。そしてある解の同伴解をすべて含めた集合を考えたとき、その集合の個数が有限個ならば解の個数は有限個と言えて、逆に無限個ならば解の個数も無限個あると言える。

2 $x^{a+bi}=1$の解の個数

$x^{a+bi}=1$(a,bは実数、iは虚数単位)について,3つの場合に分けて考える。
まず一つ目は aが有理数、b=0の場合である。この場合aは任意の整数 M と自然数 N を用いて
$a=M/N$ ($|M|$とNは互いに素）と表せる。よって、

$$x^a=e^{\frac{M}{N}(\log|x|+i\theta)}=1=e^{2ni\pi}(nは任意の整数)$$

より $\log|x|=0,\theta=\frac{N}{M}*2n\pi$
このとき、$\frac{N}{M}*2n\pi+2N\pi=\frac{N}{M}*2(n+M)\pi$ より、
異なる解は$|M|$個存在する。
2 つ目は b=0 で a が無理数の場合である。この場合はまず

$$x^a=e^{a\,(\log|x|+i\theta)}=1=e^{2ni\pi}\quad (n は任意の整数)$$

なので $\log|x|=0,\quad\theta=\frac{2n\pi}{a}$ となり、aが無理数であるから明らかに同伴解となる解の組が存在しない。より解の個数は無限個となる。
最後は b ≠ 0 の 場合である。このとき、

$$e^{(a+bi)\,(\log|x|+i\theta)}=e^{2ni\pi}\quad (nは任意の整数)より$$

$$a\log|x|=b\theta,\ a\theta+b\log|x|=2n\pi$$

上式で n が変化していくと|x|が単調に変化していくため、明らかに同伴解の組が存在しないので、これもまた解の個数は無限個ある。

3.一般の方程式

最後に、

$$\sum_{k=0}^{n}A_kx^{a_k}=A_0+A_1x^{a_1}+A_2x^{a_2}+\cdots A_nx^{a_n}=0$$
$$(A_k,a_kは複素数,\ a_0=0,\ A_0\neq0)$$

の形の方程式について、解が C 上に無限個あることの証明を行う。まずこの方程式が L 上に無限個、異なる解をもつことを示す。
C 平面と関数F(x) =$\sum_{k=0}^{n}A_kx^{a_k}$ を考える。今、xの偏角を固定して、その絶対値を0から∞まで動かし てやった時にF(x) は定数項となる点から、無限遠へとのびていく一本の曲線のグラフをとる。さてこの曲線は偏角を変化させた時に C 平面上で何周でも回転できる。
つまりこの時、F(x) =A(A ≠ A0) の解は L 上に無限個ある。

結論

- $(x_k)^{a+bi} = e^{(a+bi)(log|x|+i(\theta+2k\pi))}$ とあらわせる
- 項が一つのみのとき、
  次数が有理数ならば解は有限個,
  次数が無理数ならば解は無限個,
  次数が実数でないときも
  解は無限個
- 項が複数あるとき,次数のうち少なくとも一つが有理数でないならば解は無限個
- 項が一つまたは二つのとき、
  三角関数が代数的に解けるならば方程式も解くことができる

3 一般の方程式(続き)

ここで、解が C 上に無限個あることの証明を行う。背理法で示す。
解が有限個ならば少なくとも一つの解x(絶対値|x|偏角 θ) が存在してそれの同伴解が無数に存在しなければならない。こうしたとき、同伴解の一つを xs とおくと

$$\Re\sum_{k=0}^{n} A_k {x_s}^{a_k} - A_k x^{a_k} = S_k \cos X_k + T_k \sin X_k = 0$$

$$\text{但し}\quad X_k = \beta_k \log|x| + \alpha_k\theta,$$

$$S_k = A_k(e^{-\alpha k log|x| - bk(\theta+2s\pi)}\cos 2s\alpha k\pi - e^{\alpha k \log|x| - \beta k\theta})$$

$$T_k = A_k(-e^{\alpha k \log|x| - \beta k(\theta+2s\pi)}\sin 2s\alpha k\pi)$$

となるので 2n + 2 個の変数 (cosX0,sinX0,,,,) に対して s を変えることにより、この方程式の次数の条件から 2n+2 個以上の独立する方程式が得られる。よってそれらの変数の値は一意に求まるがそれが自明解(すべて 0)となることは明らかである。
しかし三角関数の基本的な関係である
$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$よりそのような解は不適である。これによって最初に 仮定した解はこの方程式に対して一つも存在しないことが示された。つまり解が有限個であるという仮定が誤り。したがって背理法により、解が無限個あることが示された。

4 今後の展望

ここでは、第3章で考察した形以外の形について分かったことを述べ、そこから得られた予想について書く。まずは次の形の方程式

$$A_1 x^{a_1} + A_2 x^{a_2} = A_3$$

$$(A_1, a_1, A_2, a_2 \neq 0, a_1 \neq a_2)$$

について考察を行う。この方程式は
A =$|A_1 x^{a_1}|$,B =$|A_2 x^{a_2}|$,C=$|A_3|$,
$\theta_a, \theta_b, \theta_c$をそれぞれ
$A_1 x^{a_1}$, $A_2 x^{a_2}$, A_3 の偏角とおくことにより次 の 2 つの式

$$A\cos\theta_a + B\cos\theta_b = C\cos\theta_c \ (1)$$

$$A\sin\theta_a + B\sin\theta_b = C\sin\theta_c \ (2)$$

が導き出される。両式を両辺を二乗して足し合わせて整理すると、次の形
$2AB\cos(\pm\theta_a \mp \theta_b + \pi) = A^2 + B^2 - C^2$(3) になる。
(1)を次の(4)(5)

$$A\cos\theta_a - C\cos\theta_c = -B\cos\theta_b \ (4)$$

$$-\cos\theta_c + B\cos\theta_b = -A\cos\theta_a \ (5)$$ に変形し、

(2)を(6)(7)

$$A\sin\theta_a - C\sin\theta_c = -B\sin\theta_b \ (6)$$

$$-C\sin\theta_c + B\sin\theta_b = A\sin\theta_a \ (7)$$

に変形する。また(4)(6)の両辺の二乗の和、(5)(7)の両辺の二乗の和をまた整理すると次の形

$$2CA\cos(\pm\theta_c \mp \theta_a) = C^2 + A^2 - B^2$$

$$2BC\cos(\pm\theta_b \mp \theta_c) = B^2 + C^2 - A^2$$

となる。これらは全て余弦定理の形となっている。よって正弦定理を用いて

$$\frac{A}{\sin(\theta_a - \theta_b + \pi)} = \frac{B}{\sin(\theta_c - \theta_a)} = \frac{C}{\sin(\theta_b - \theta_c)}$$

上式のように示される。しかしながらこの等式については三角関数が代数的に解けない限り解くことが出来ない。
また$x^\alpha = \beta$ という式もβ の偏角がわからなければ(つまり三角関数が代数的に解けなければ)解くことはできない。ここで1つの予想をした。その予想とは三角関数が代数的に解けるならば(9)の方程式も代数的に解くことができるというものである。
(9)のn が 1, 2 の場合は上の考察により、解くことができるといえるが、それ以上の n に対してこの予想が成り立つかどうかはよくわかっていない。