方程式の拡張

澤　志遠、久保　丈、麦　恒輝

平成 31 年 3 月 22 日

私たちは研究をするにあたって新しい方程式の性質について調べた。そしてその性質の一つとして解の個数について考え、考える中でこの方程式の解法について考察した。

1　研究動機

この世界には様々な方程式が存在する。高校では学校の授業等で二次方程式や一次連立方程式などを学ぶ。それらの方程式の変数の次数はほとんどの場合整数に限られる。しかし世の中には次数が整数でないものも存在する。その顕著な例はオイラーの等式 $e^{i\pi} = -1$ である。この美しい等式には自然対数の次数に虚数単位 i、そして円周率を含む。その次数が整数でない方程式について調べてみることとした。

2　x^a の定義

まずは x^a の定義を行う。そのため図形 L を導入する。L は $L = [\cup C_k | k \in Z]$、$C_k = [(r;\theta + 2k\pi) \in R^2 | r > 0;, 0 \leq \theta < 2\pi]$ なる集合とする。x_k を絶対値 $|x|$、偏角 $\theta + 2k\pi$ の $C_k (\in L)$ に含まれる数とする。この時、

$$x_k = |x|(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)) = e^{\log|x|+i(\theta+2k\pi)} \tag{1}$$

なので $(x_k)^a$ は

$$(x_k)^a = e^a * \log|x| + i(\theta + 2k\pi) \tag{2}$$

と定義される。ここで注意していのは任意の整数 i,j にたいして $x_i = x_j$ である場合でも $(x_i)^a = (x_j)^a$ とは限らないということである。たとえば $(4_1)^{\frac{1}{2}} = -2$ かつ $(4_2)^{\frac{1}{2}} = 2$ である。さてここで今後の文章の中で幾度か現れるであろう同伴解という言葉について説明をする。同伴解は次のように定義する。ある一変数方程式 F（今回は x を変数とする）に対して、その解の一つである x_s に対してある自然数 t(t ¿ s) が存在して $F(x_s) = F(x_t) = 0$ となるとき、この x_t を x_s に対する同伴解と呼ぶ。そしてある解に対してその同伴解をすべて含めた集合を考えたとき、その集合の個数が有限個ならば解の個数は有限個と言えて、逆に無限個あるならば解の個数も無限個あると言える。

また x^a は $f = \log$ として次のように表現することもできる。

$$x^a = f^{-1} * f^{-1}(f * f(x) + f * f(e^a)) \tag{3}$$

この表現の仕方は $x \times a$ が

$$x \times a = f^{-1}(f(x) + f(a)) \tag{4}$$

と表現されることに基づく。こう表現することにより、加法に対して乗法があるように、乗法に対して x^a という演算があることがわかる。

3　$x^a = 1$ の解の個数について

$x^{a+bi} = 1$　(a, b は実数、i は虚数) について解く。解く前に今後の文章の中で幾度か現れるであろう同伴解という言葉について説明を行わせてもらう。同伴解は次のように定義する。ある一変数方程式（今回は x を変数とする）に対して、その解である $x = |x|(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対してある自然数 n が存在して

$x_n = |x|(\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi))$ がその方程式を満たしたときにこの x_n を同伴解と呼ぶ。そしてある解に対してその同伴解をすべて含めた集合を考えたとき、その集合の個数が有限個ならば解の個数は有限個と言えて、逆に無限個あるならば解の個数も無限個あると言える。さて、$x^{a+bi} = 1$ は次のように変形出来る。よって次の 3 つの場合に分けることが出来る。まず一つ目は a が有理数、b=0 の場合である。この場合 a は任意の整数 M と自然数 N を用いて $a = M/N(|M|$ と N は互いに素) とおける。なので

$$x^a = e^{(M/N)*(\log|x|+i\theta)} = 1 = e^{2ni\pi}(n\text{ は任意の整数}) \tag{5}$$

となり、$|x| = 1, \theta = 2nN\pi/M$ となる。そして明らかに $2nN\pi/M + 2N\pi = 2(n + M)N\pi/M$ なのでこの方程式は $|M|$ 個の異なる解をもち、すべての解がそれらのうちのどれか一つの同伴解となっている。よって解の個数は有限個となる。2 つ目は b=0 で a が無理数の場合である。この場合はまず

$$x^a = e^{a*(\log|x|+i\theta)} = 1 = e^{2ni\pi}(n\text{ は任意の整数}) \tag{6}$$

なので $|x| = 1, \theta = 2n\pi/a$ となり、a が無理数であるから明らかに同伴解となる解の組が存在しない。より解の個数は無限個となる。そして最後は b ≠ 0 の場合である。このとき、

$$x^{a+bi} = e^{(a+bi)*(\log|x|+i\theta)} = 1 = e^{2ni\pi}(n\text{ は任意の整数}) \tag{7}$$

$$a\log|x| - b\theta = 0, b\log|x| + a\theta = 2n\pi \tag{8}$$

で n が変化していくと $|x|$ が変化していくため、明らかに同伴解の組が存在しないため、これもまた解の個数は無限個ある。

4 一般の方程式について

副題には一般の方程式と書かれているが、ここでは先の章の二つ目、三つ目の場合のような次数を少なくとも一つ含む方程式とする。

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x^{a_k} = 0 \tag{9}$$

(もし $a_0 \neq 0$ ならば x^{a_0} でくくりだしてやればよいだけの話であるから、最初から $a_0 = 0$ としておく) とおく。(その次数の少なくとも一つには有理数でない数が含まれるとする) こうしたとき) に対して解が C 上に無限個あることの証明を行う。その前に補題としてこの方程式が L 上に無限個、異なる解をもつことを示す。C 平面と関数 $F(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^{a_k}$ を考える。今、x の偏角を固定して、その絶対値を 0 から inf まで動かしてやった時 (または、絶対値を固定して偏角を $-\inf$ からまで動かしてやった時) に F(x) は明らかにその定数項となる点から、無限遠へとのびていく一本の曲線のグラフをとる。さてこの曲線は偏角を変化させた (または絶対値を変化させた) 時に C 平面上で何周でも回転できることがわかる。つまりこの時、$F(x) = A(A \neq A_0)$ の解は L 上に無限個あるということは明らか。これにて、補題は示された。補題によって L 上には無限個解をもつことが言えたので、本題に戻る。背理法で示す。解が有限個ならば少なくとも一つの解 x(絶対値 $|x|$, 偏角 θ) が存在してそれの同伴解が無数に存在しなければならない。そうでなければ解を無限個持つこととなる。こうしたとき、同伴解の一つを x_s とおくと

$$R\sum_{k=0}^{n} A_k {x_k}^{a_k} - A_k x^{a_k} = \sum_{k=0}^{n} S_k \cos X_k + T_k \sin X_k = 0 \tag{10}$$

$X_k = \beta_k \log|x| + \alpha_k\theta$, $S_k = A_k(e^{\alpha_k \log|x| - \beta_k(\theta+2s\pi)} \cos 2s\alpha_k\pi - e^{\alpha_k \log|x| - \beta_k\theta})$, $T_k = A_k(-e^{\alpha_k \log|x| - \beta_k(\theta+2s\pi)} \sin 2s\alpha_k\pi)$ 、2n+2 個の変数に対して 2n+2 個以上の独立する方程式が得られる。よってそれらの変数の値は一意に求まるがそれが自明解 (すべて 0) となることは明らかである。しかし三角関数の基本的な関係である $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ よりそのような解は不適である。これによって最初に仮定した解はこの方程式に対して一つも存在しないことが示された。つまり解が有限個であるという仮定が誤り。したがって背理法により、解が無限個あることが示された。

5　非自明な形についての考察

前前章で考察した形以外の形についてここでは分かったことを述べ、そこから得られた予想について示す。まずは次の形の方程式

$$A_1x^{a_1}+A_2x^{a_2}=A_3(A_1,a_1,A_2,a_2\neq 0,a_1\neq a_2) \tag{11}$$

について考察を行う。この方程式は $A=|A_1x^{a_1}|,B=|A_2x^{a_2}|,C=|A_3|,\theta_A,\theta_B,\theta_C$ をそれぞれ $A_1x^{a_1},A_2x^{a_2},A_3$ の偏角とおくことにより次の 2 つの式

$$A\cos\theta_A+B\cos\theta_B=C\cos\theta_C \tag{12}$$

$$A\sin\theta_A+B\sin\theta_B=C\sin\theta_C \tag{13}$$

が導き出される。(12),(13) 式の両辺を二乗して足し合わせて整理すると、次の形

$$2AB\cos(\pm\theta_A\mp\theta_B+\pi)=A^2+B^2-C^2 \tag{14}$$

になる。(12) 式を次の (15),(16) 式

$$A\cos\theta_A-C\cos\theta_C=-B\cos\theta_B \tag{15}$$

$$-C\cos\theta_C+B\cos\theta_B=-A\cos\theta_A \tag{16}$$

に変形し、(13) 式を (17),(18) 式

$$A\sin\theta_A-C\sin\theta_C=-B\sin\theta_B \tag{17}$$

$$-C\sin\theta_C+B\sin\theta_B=-A\sin\theta_A \tag{18}$$

に変形する。また (15)(17) 式の両辺の二乗の和、(16),(18) 式の両辺の二乗の和をまた整理すると次の形

$$2CA\cos(\pm\theta_C\mp\theta_A)=C^2+A^2-B^2 \tag{19}$$

$$2BC\cos(\pm\theta_B\mp\theta_C)=B^2+C^2-A^2 \tag{20}$$

となる。これらは全て余弦定理の形となっている。また正弦定理を用いれば次のようになる。

$$\frac{A}{\sin(\theta_A-\theta_B+\pi)}=\frac{B}{\sin(\theta_C-\theta_A)}=\frac{C}{\sin(\theta_B-\theta_C)} \tag{21}$$

示される。しかしながらこの等式については三角関数が代数的に解けない限り解くことが出来ない。また $x^\alpha=\beta$ という式も β の偏角がわからなければ（つまり三角関数が代数的に解けなければ）解くことはできない。ここで 1 つの予想をする。その予想とは三角関数が代数的に解けるならば（9）の方程式も代数的に解くことができるということである。（9）式の n が 1，2 の場合は上の考察により、解くことができるといえるが、それ以上の n に対してこの予想が成り立つかどうかはよくわかっていない。

本課題研究を進めるにあたって、適切な指導を賜った指導教諭の大西先生、忙しい中でありながら時間を割いていただいた京都大学の曾我部先輩に感謝いたします。その他にも本研究に協力してくださった神戸高校の先生方に厚く御礼申し上げます。