

最近の問題6

1

地球を周回する人工衛星の存在を意識する機会は少ないが、私たちの日常生活は、気象観測、全地球測位システム (GPS) の活用、通信衛星や放送衛星の利用など、人工衛星の恩恵を多く受けている。このような観測や通信の機器を、地球を周回する軌道上にのせて人工衛星とするには、ロケットの使用が不可欠である。ここでは、人工衛星の運動とロケットによる加速について考える。以下では、地球は半径 R の球とし、地表での重力加速度の大きさを g とする。なお、実際の人工衛星の運動とロケットによる加速では、地球の自転や空気抵抗なども考慮する必要があるが、簡単のため、地球は宇宙空間に静止し、回転していないとし、空気抵抗も無視することにする。

[A] 地球を周回する人工衛星の運動を考える際に参考になる数値として、第一宇宙速度がある。第一宇宙速度 v_1 は、円軌道を描きながら、地表すれすれに水平方向に飛行する人工衛星の速さと定義される。

- (1) 第一宇宙速度 v_1 を R と g を用いて表せ。
- (2) 第一宇宙速度 v_1 を有効数字 2 桁で計算し、[km/s] の単位で求めよ。計算では、 $R = 6400 \text{ km}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とせよ。

[B] 次に、ロケットにより機器を水平方向に加速し、第一宇宙速度以上の速さにする過程について考える。ロケットは、燃料の燃焼で生じる高速のガスをノズルから噴射し、その反動で加速を行う。以下では、ガスの噴射による加速の原理を理解するため、摩擦が無視できるなめらかな水平面上で、ばねの力で小物体を打ち出して加速する過程を考える。この打ち出される小物体は、ロケットが噴射するガスに相当する。まず、単純な加速過程を考えよう。

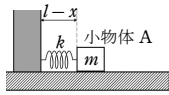


図 1

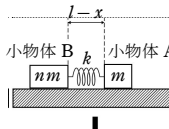


図 2

- (3) ロケットが噴射するガスに相当する、質量 m の小物体 A を考える。小物体 A には、質量が無視できるばね (ばね定数 k) が水平に取りつけられている。図 1 のように、なめらかな水平面上に小物体 A をおき、固定された壁にばねの端を押し当て、ばねを自然の長さ l から長さ x だけ縮めてから静かにはなした。ばねの力で小物体 A は加速される。ばねが壁を離れた後の小物体 A の速さ V_A を求めよ。
- (4) 次に、ロケットに相当する小物体 B を用意し、図 2 のように、(3) の小物体 A を押し当て、ばねの自然の長さ l から長さ x だけ縮めてから静かにはなした。小物体 B は、小物体 A の n 倍 ($n \geq 1$) の質量をもつ。2 つの小物体が最初静止していた場合、ばねが小物体 B から離れた後に小物体 B がもつ速さ V_B を、 n と (3) の V_A を用いて表せ。

[C] (3) の速さ V_A は、ロケットが噴射するガスの速さに相当するが、実際のガスの速さは、たかだか $3 \sim 4 \text{ km/s}$ であることが知られている。したがって、(4) の加速過程で得られる速さ V_B は、第一宇宙速度 v_1 に達しない。

そこで以下では、実際のロケットにより近い加速過程を考える。図 3 のように、ロケットが噴射するガスに相当するものとして、(3) のばねを取りつけた、質量 m の小物体 G を N 個用意し、互いに連結する。また、人工衛星になる機器に相当する、質量 m の小物体 S を用意し、左端に置き小物体 G と連結する。このとき、すべてのばねは自然の長さ l から長さ x だけ縮んでいる。連結した N 個の小物体 G と小物体 S は、摩擦のないなめらかな水平面上で、最初静止していた。その後、図の右端から 1 個ずつ小物体 G の連結を解き、順次放出することで加速を行う。放出される小物体 G 以外の小物体は、小物体間の連結により、加速中は変形せず一体となって運動するものとする。なお、この設定は、人工衛星になる機器の質量の、 N 倍の質量のロケット燃料を用意することに相当する。

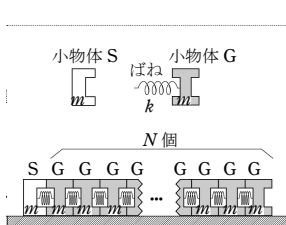


図 3

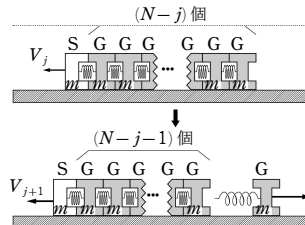


図 4

- (5) 図 4 のように、小物体 G を j 個放出した後の、小物体 S の速さが V_j のとき、さらに小物体 G を 1 個放出すると、小物体 S の速さは V_{j+1} になった。速さ V_j と V_{j+1} の関係が、 $V_{j+1} = V_j + \frac{1}{\sqrt{(N-j)(N-j+1)}} V_A$ で表されることを示せ。
- (6) N 個の小物体 G をすべて放出した後の、小物体 S の速さ V_S を求めよ。解答では、下に定義する級数の和 S_N を用いよ。

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(N-1)N}} + \frac{1}{\sqrt{N(N+1)}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}$$

(7) (5) と (6) で考えた加速過程は、ロケット燃料の質量が、人工衛星となる機器の質量の N 倍の場合に相当し、 V_A はロケットが噴射するガスの速さに相当する。

$V_A = 3.0 \text{ km/s}$ のとき、(6) の最終的なロケットの速さ V_S が、第一宇宙速度以上になるための N の条件を求めよ。図 5 のグラフは、横軸を N にとり、(6) で定義した S_N の値を縦軸にプロットしたものである。解答では、このグラフから読み取った数値を用いよ。

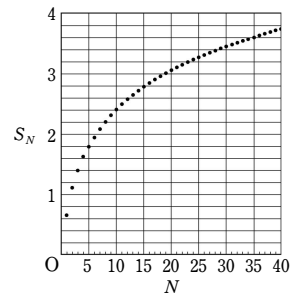
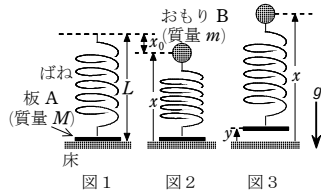


図 5

- (8) ばねがもとももっていたエネルギーの合計を E_0 とし、最終的に小物体 S がもつ運動エネルギーを E_S とすると、その比 $\alpha = \frac{E_S}{E_0}$ はロケットによる加速のエネルギー効率を表している。この効率 α を m 、 V_A 、 N 、 S_N のうち必要なものを用いて表せ。また、 $N = 10$ と $N = 30$ の場合について、効率 α の値を有効数字 2 桁で計算せよ。
- (9) これまでの結果を参考にし、機器をロケットで加速し人工衛星とする場合、ロケットの設計上配慮すべき重要な点について、自由に論述せよ。

2

図1のように、質量 M の板 A が水平な床の上に置かれ、板 A の上面中央には、ばね(自然の長さ L 、ばね定数 k) が常に鉛直を保つように取り付けられている。いま、図2のように、ばねの上端に質量 m のおもり B を取り付け、つりあいの位置で静止させた。このとき、ばねの自然の長さからの縮みは x_0 ($x_0 < L$) であった。板



A の厚さ、おもり B の大きさ、ばねの質量、および空気抵抗はないものとする。また、板 A およびおもり B の運動は常に鉛直方向に限られる。重力加速度の大きさを g として、次の問いに答えよ。

(1) x_0 を m, g, k を用いて表せ。

おもり B をつりあいの位置から鉛直下方に d ($0 < d < L - x_0$) だけ押し下げて固定し、時刻 $t=0$ でその固定を解除したところ、おもり B は角振動数 ω ($\omega > 0$) の単振動を始めた。板 A は床に接したままであった。以下では、おもり B の位置を床表面からはかった高さ x で表す。

(2) ω を k, m を用いて表せ。

(3) 時刻 t ($t \geq 0$) における、おもり B の位置 x で正しいものを次から選べ。

- ① $x = L - x_0 + d \sin \omega t$ ② $x = L - x_0 - d \sin \omega t$
 ③ $x = L - x_0 + d \cos \omega t$ ④ $x = L - x_0 - d \cos \omega t$
 ⑤ $x = L + (d + x_0) \sin \omega t$ ⑥ $x = L - (d + x_0) \sin \omega t$
 ⑦ $x = L + (d + x_0) \cos \omega t$ ⑧ $x = L - (d + x_0) \cos \omega t$

(4) 時刻 t に板 A がばねから受ける力 F を、 m, g, k, d, ω, t を用いて表せ。ただし、 F は鉛直上向きを正とする。

(5) 時刻 t に板 A が床から受ける抗力 N を、 m, M, g, k, d, ω, t を用いて表せ。

ただし、 N は鉛直上向きを正とする。

次に、このような実験を d を少しずつ大きくしながらくり返し行った。すると、 d がある値 d_0 をこえたところで、図3のように、板 A は水平を保ったまま床から離れる運動をするようになった。

(6) d_0 を m, M, g, k を用いて表せ。

以下では $d > d_0$ の場合を考える。板 A が床を初めて離れた時刻を t_1 、次に床に接した時刻を t_2 とする。

(7) $\cos \omega t_1$ を d, d_0 を用いて表せ。

(8) 時刻 t_1 における、おもり B の位置 x_1 を、 L, M, g, k を用いて表せ。

(9) 時刻 t_1 における、おもり B の速度 v_1 を、 ω, d, d_0 を用いて表せ。ただし、 v_1 は鉛直上向きを正とする。

床表面からはかった板 A の高さを y とする。板 A とおもり B の重心の位置を床表面からはかった高さ z で表すと、 $z = \frac{mx + My}{m + M}$ となる。また、板 A の速度を u 、おもり

B の速度を v とすると、板 A とおもり B の重心の速度は $\frac{mv + Mu}{m + M}$ で与えられる。

(10) $0 \leq t \leq t_2$ における重心の位置 z を表すグラフで最も適切なものを、次の①～⑥の中から選べ。

