$\boxed{1}$ [2020 大分大]

図１のように，なめらかな水平面に壁があり，その壁にばね定数 k のばねが取りつけられている。水平面上に置かれた質量 $2m$ の小物体 A をばねに接触させてばねを自然の長さから長さ x だけ縮め，静かに手をはなした。すると小物体 A はばねから離れ，その後，水平面上を右向きに一定の速度 v_a で運動し，静止していた質量 m の小物体 B と衝突した。ただし，右向きを正，重力加速度の大きさを g とする。

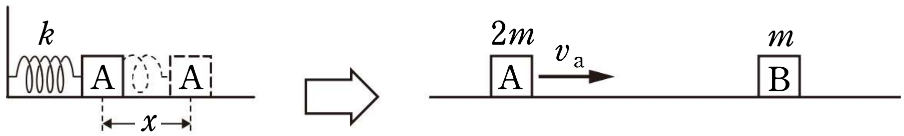


図１

(1)　自然の長さから x 縮められたばねに蓄えられた弾性エネルギーを求めよ。

(2)　小物体 A の速度 v_a を求めよ。

(3)　小物体 A と B の反発係数が e $(0<e<1)$ のとき，衝突後の小物体 B の速度 v_b' を v_a を用いて表せ。

(4)　衝突後の小物体 A の運動の向きを答えよ。

図２のように，衝突後，右向きに速度 v_b' で運動していた小物体 B が上面が水平面と同じ高さの台車に乗り移ると，台車は右向きに動きだした。小物体 B は台車の上で l だけすべり，その後は台車と一体となって水平面を右向きに速度 V で運動した。台車の質量は M で，台車と床の間には摩擦ははたらかず，小物体 B と台車の間の動摩擦係数は μ' である。また右向きを正，重力加速度の大きさを g とする。

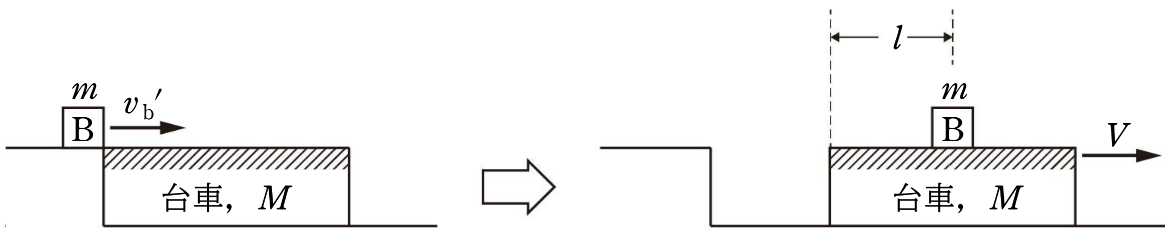


図２

(5)　小物体 B が台車の上をすべっているときの小物体 B および台車の床に対する加速度をそれぞれ求めよ。

(6)　速度 V を M，m，v_b' を用いて表せ。

(7)　小物体 B が台車の上をすべっていた時間 t を g，μ'，V，M，m を用いて表せ。

(8)　小物体 B が台車の上ですべる間に失われた全力学的エネルギー ΔE を M，m，v_b' を用いて表せ。

(9)　小物体 B が台車の上をすべった距離 l を g，μ'，ΔE，m を用いて表せ。

(10)　小物体 B が台車に乗ってからの台車の速度と時間の関係の概略図をかけ。ただし，小物体 B が台車に乗った瞬間の時刻を 0，小物体 B が台車の上で停止した時刻を t とする。

$\boxed{2}$［2021 北海道大］

次の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ に適切な数式を入れよ。また，$\boxed{\text{a}}$ には選択肢から最も適切なものを1つ選べ。

地球に対する小球の運動を考える。地球は半径 R〔m〕，質量 M〔kg〕の一様な球とする。一方，小球の大きさは無視でき，その質量は m〔kg〕で，地球の質量に比べ十分に小さい。万有引力定数を G〔N・m^2/kg^2〕とし，小球に対する地球の自転と公転の影響，小球と地球表面との摩擦や空気抵抗はないものとする。

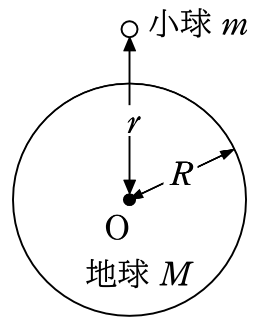


図1

(1)　図1のように小球が地球の中心(点O)から r〔m〕($r \geqq R$)の位置にあるとき，小球にはたらく万有引力の大きさは $\boxed{\text{ア}}$〔N〕となる。また，このときの小球の万有引力による位置エネルギーは $\boxed{\text{イ}}$〔J〕である。ただし，無限遠を位置エネルギーの基準とする。

図2のように，小球を速さ v〔m/s〕で水平方向に投射したところ，小球は半径 r の等速円運動をした。$r > R$ のとき，小球の速さ v は G，M，r を用いて $\boxed{\text{ウ}}$〔m/s〕と表され，小球が地球を1周してもとの位置にもどるまでに要する時間は，G，M，r を用いて $\boxed{\text{エ}}$〔s〕と表される。

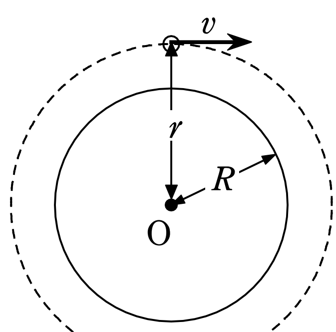


図2

一方，小球が地球の表面すれすれを等速円運動する場合(地表からの垂直抗力を受けずに半径 R の円周上を運動する場合)，小球が地球を1周するのに要する時間は(エ)で $r = R$ としたものに一致する。

(2)　図3のように地球の中心(点O)を通る直線状のトンネルをつくり，(1)と同じ質量 m〔kg〕の小球をトンネル入り口の点Aから静かにはなした。その後の小球の運動について考える。ただし，トンネルは十分に細く，これによる地球の質量の変化はないものとし，その密度は一様とする。また，小球とトンネルとの摩擦はなく，小球には地球との万有引力のみがはたらくとする。

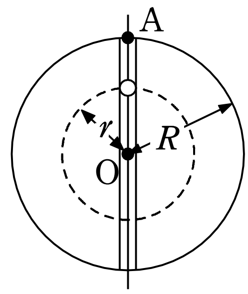


図3

点Oから r〔m〕($r \leqq R$)の位置にある小球が地球から受ける力は，地球の全質量 M〔kg〕のうち，点Oから半径 r の球内の質量 M'〔kg〕が点Oに集まったとして，これから小球が受ける万有引力に等しいことが知られている。M' は c を定数として $M' = cr^3$〔kg〕になるものとすると，この c は R と M を用いて $\boxed{\text{オ}}$〔kg/m^3〕と表される。また，点Oから r〔m〕の位置にある小球にはたらく万有引力の大きさを c，G，m，r を用いて表すと $\boxed{\text{カ}}$〔N〕となる。この力を受けて小球は点Oを中心とする単振動を行う。その角振動数は c，G を用いて $\boxed{\text{キ}}$〔rad/s〕と表される。このこ

とから，点 A から動き始めた小球が再び点 A にもどるまでに要する時間は，(1) の(エ) で $r=R$ としたものと $\boxed{\quad a \quad}$ ことがわかる。また，小球が点 A にあるときの位置エネルギーは，点 O にあるときより $\varDelta U$〔J〕だけ大きいとすると，この $\varDelta U$ は，G, M，m，R を用いて $\boxed{\quad ク \quad}$〔J〕と表される。さらに，小球が点 O を通過するときの速さは G, M, R を用いて表すと $\boxed{\quad ケ \quad}$〔m/s〕となる。

$\boxed{\quad a \quad}$ **の選択肢：**

① 比べて長い　② 等しい　③ 比べて短い

$\boxed{1}$［2020 大分大］

(1)　自然の長さから x 縮められたばねに蓄えられた弾性エネルギーは　$\boldsymbol{\frac{1}{2}kx^2}$

(2)　力学的エネルギー保存則より　$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}\times 2mv_a{}^2$

A は右向きに運動するので $v_a>0$ だから　$v_a=\boldsymbol{x\sqrt{\frac{k}{2m}}}$

(3)　衝突直後の小物体 A の速度を $v_a{}'$ とする。運動量保存則より

$2mv_a=2mv_a{}'+mv_b{}'$

また，反発係数の式「$e=-\frac{v_1{}'-v_2{}'}{v_1-v_2}$」より　$e=-\frac{v_a{}'-v_b{}'}{v_a-0}$　したがって

$$\begin{cases} 2v_a=2v_a{}'+v_b{}' \\ -ev_a=v_a{}'-v_b{}' \end{cases}$$

辺々足すと　$(2-e)v_a=3v_a{}'$　よって　$v_a{}'=\frac{2-e}{3}v_a$　……①

① 式を　$v_b{}'=2(v_a-v_a{}')$　に代入して

$$v_b{}'=2\left(v_a-\frac{2-e}{3}v_a\right)=\boldsymbol{\frac{2(1+e)}{3}v_a}$$

(4)　$0<e<1$ なので，① 式において $2-e>0$ となる。また，$v_a>0$ より $v_a{}'>0$ である。つまり，衝突後の小物体 A の運動の向きは　**右向き**

(5)　小物体 B が台車から受ける垂直抗力の大きさを N とし，小物体 B と台車の床に対する加速度をそれぞれ β，γ とすると，図 a，b のような力がはたらくことがわかるので，小物体 B の鉛直方向の力のつりあいの式と，それぞれの運動方程式を立てると

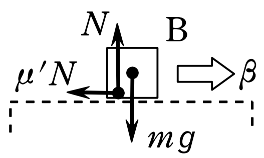


図 a

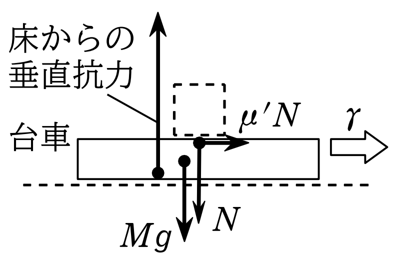


図 b

$$\begin{cases} N-mg=0 \\ m\beta=-\mu'N \\ M\gamma=\mu'N \end{cases}$$

よって　$\beta=\boldsymbol{-\mu'g}$，$\gamma=\boldsymbol{\frac{\mu'mg}{M}}$

(6)　水平方向の運動量の和は保存されるので

$mv_b{}'=(m+M)V$

よって　$V=\boldsymbol{\frac{m}{m+M}v_b{}'}$

(7)　t は，台車が静止した状態から速度 V になるまでにかかる時間である。(5) から台車は等加速度直線運動するので「$v=v_0+at$」より $V=0+\gamma t$ となる。よって

$$t=\frac{V}{\gamma}=\boldsymbol{\frac{MV}{\mu'mg}}$$

(8)　位置エネルギーは変化していないので，運動エネルギーの減少量を計算すればよい。

$$\varDelta E=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{b}}'^2-\frac{1}{2}(m+M)V^2$$

(6) の結果を代入して

$$\varDelta E=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{b}}'^2-\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v_{\mathrm{b}}'\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{b}}'^2\left(1-\frac{m}{m+M}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{mMv_{\mathrm{b}}'^2}{2(m+M)}}$$

(9)　動摩擦力が小物体 B と台車に仕事をした分，系の力学的エネルギーが $-\varDelta E$ 変化する。ところで，小物体 B が台車に対して l だけ移動するとき，台車が床に対して L だけ移動しているとすれば，小物体 B は床に対して $l+L$ だけ移動している。

小物体 B については，動摩擦力の向きと移動する向きは逆向きなので，仕事は負，台車については，動摩擦力の向きと移動する向きは同じ向きなので，仕事は正となる。

よって

$$-\mu' mg(l+L)+\mu' mgL=-\varDelta E$$

ゆえに　$-\mu' mgl=-\varDelta E$　なので

$$l=\boldsymbol{\frac{\varDelta E}{\mu' mg}}$$

(10)　時刻 $0\sim t$ において，台車は加速度 $\gamma=\dfrac{\mu' mg}{M}$ (>0)，初速度 0 の等加速度直線運動を行い，時刻 t からは，速度は V で一定となる。よって，求める概略図は図 c のようになる。

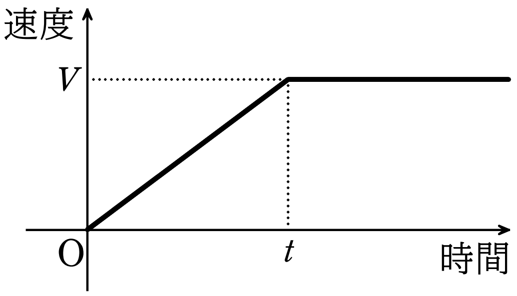


図 c

$\boxed{2}$［2021 北海道大］

(1)(ア)　地球の外部における万有引力のようすは，地球と等しい質量をもつ質点が地球の中心にあるときと同様になるので，小球にはたらく万有引力の大きさは

$$\boldsymbol{\frac{GMm}{r^2}}\ \text{〔N〕}$$

(イ)　小球の万有引力による位置エネルギーは

$$\boldsymbol{-\frac{GMm}{r}}\ \text{〔J〕}$$

(ウ)　速さ v，半径 r の等速円運動の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}\qquad \text{よって}\qquad v=\boldsymbol{\sqrt{\frac{GM}{r}}}\ \text{〔m/s〕}$$

(エ)　1周するのに要する時間(周期)は等速円運動の周期の式「$T=\dfrac{2\pi r}{v}$」より

$$\frac{2\pi r}{v}=\boldsymbol{2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}}\ 〔\mathrm{s}〕$$

(2)(オ)　点Oから半径 R の球内の質量は地球の質量 M に等しいので，$M'=cr^3$ において $r=R$ のとき $M'=M$ である。よって

$$c=\frac{M'}{r^3}=\boldsymbol{\frac{M}{R^3}}\ 〔\mathrm{kg/m^3}〕$$

注　密度が $\dfrac{M'}{\dfrac{4\pi r^3}{3}}=\dfrac{3}{4\pi}c$ になる。

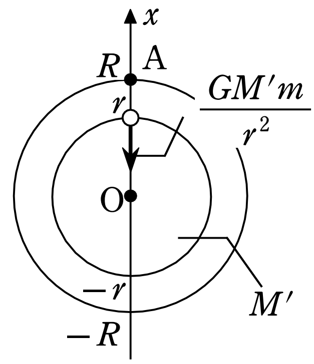
(カ)　点Oから r〔m〕の位置にある小球にはたらく万有引力の大きさは

$$\frac{GM'm}{r^2}=\frac{Gcr^3m}{r^2}=\boldsymbol{Gcmr}\ 〔\mathrm{N}〕$$

(キ)　図aのように x 軸をとり，小球が座標 x にあるときの加速度を a〔m/s²〕とする。万有引力は向きも考慮して $-Gcmx$ と表されるので，運動方程式は

$ma=-Gcmx$　　よって　　$a=-Gcx$

であり，確かに $x=0$ を振動の中心とする単振動をすることがわかる。角振動数は　$\boldsymbol{\sqrt{Gc}}$〔rad/s〕



図a

(a)　点Aから動き始めた小球が再び点Aにもどるまでに要する時間(周期)は　$\dfrac{2\pi}{\sqrt{Gc}}$

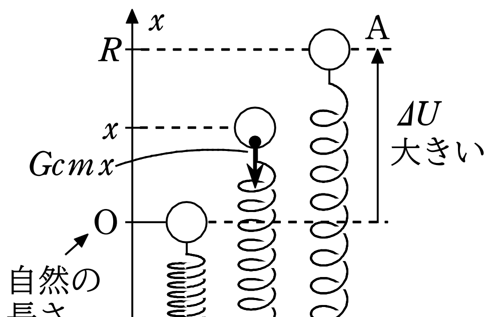
(オ)の結果を代入すれば　$\dfrac{2\pi}{\sqrt{Gc}}=2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$

一方，(エ)で $r=R$ としたものは

$2\pi R\sqrt{\dfrac{R}{GM}}=2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$　　であり，2つは等しいから　**②**

(ク)　小球が地球の内側にあるときに小球にはたらく力は $-Gcmx$ であり，図bのように，ばね定数が Gcm のばねの弾性力と同等である。すると，ΔU はばねが自然の長さから R 伸びたときの弾性力による位置エネルギーと同等であり

$$\Delta U=\frac{1}{2}GcmR^2=\frac{1}{2}G\frac{M}{R^3}mR^2=\boldsymbol{\frac{GMm}{2R}}\ 〔\mathrm{J}〕$$



図b

(ケ)　小球が点Oを通過するときの速さは，単振動の速さの最大値なので，振幅 R と角振動数 $\sqrt{Gc}$ の積で　$R\sqrt{Gc}=R\sqrt{G\dfrac{M}{R^3}}=\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{GM}{R}}}$〔m/s〕