[2014 広島大]

図1のように，質量 m の小物体Xを地球の中心Oから距離 h だけ離れた点AよりOAに垂直な方向へ速さ v_0 で打ち出した。その後，小物体Xは点Oを焦点とするだ円軌道を描き，点Aと点Oを結ぶ直線上で点Oから距離 d $(d>h)$ だけ離れた点Bに速さ v_1 で到達した。軌道上で点Bは点Oから最も離れている。地球の質量を M，万有引力定数を G とし，h は地球の半径より大きいものとする。また，地球の大気，自転および公転の影響，地球以外の天体による重力の影響は無視できるものとする。次の問いに答えよ。

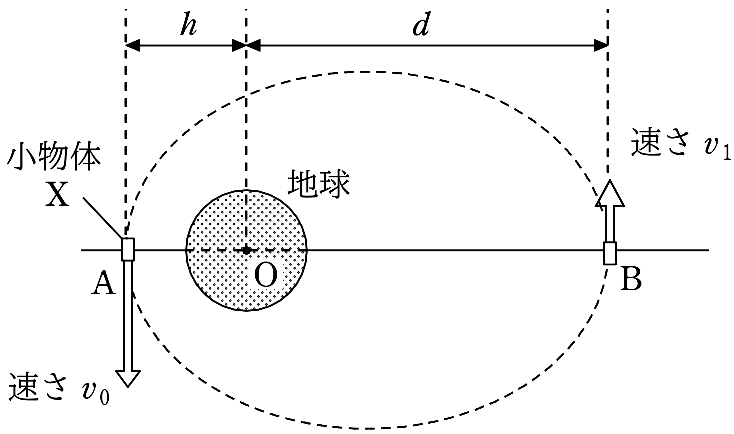

図1

(1) 小物体Xの点Aにおける力学的エネルギーと点Bにおける力学的エネルギーとの間に成りたつ関係式を，m，M，G，h，d，v_0，v_1 を用いて表せ。

(2) 点Aにおける小物体Xの面積速度は $\dfrac{1}{2}v_0h$ であり，点Bにおける小物体Xの面積速度は $\dfrac{1}{2}v_1d$ である。ケプラーの第二法則を使い，速さ v_0 を，M，G，h，d を用いて表せ。

図2のように，小物体Xは点Bに到達した瞬間，質量 $\dfrac{m}{2}$ の小物体Yと質量 $\dfrac{m}{2}$ の小物体Zに分解した。分解直後の小物体Yの地球から見た速さは v_2 で，運動の方向はだ円軌道の接線方向であった。一方，分解直後の小物体Zの速さは0であった。小物体Yは点Oを中心とする半径 d の円軌道を描いて運動し，小物体Zは線分OBにそって地球に落下した。小物体YとZの間の万有引力は無視できる。

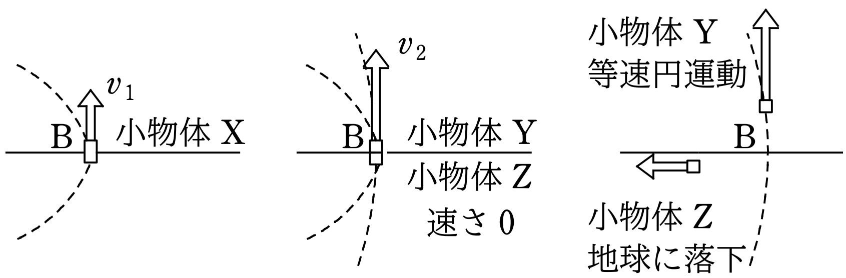

図2　小物体Xが小物体Yと小物体Zに分解

(3) 小物体Yが等速円運動するとき，速さ v_2 と周期 T を，G，M，d を用いて表せ。

(4) 小物体Xが分解する瞬間の前後で運動量は保存する。この事実を用い，小物体Yの軌道半径 d と h の比を求めよ。

(5)　小物体 Y の周期 T を概算し，最も近い値を次の解答群の中から選び，記号で答えよ。ただし，近似値として $G \fallingdotseq \frac{20}{3} \times 10^{-11}$ N・m^2/kg^2，$h \fallingdotseq 6.4 \times 10^6$ m，$M \fallingdotseq 6.0 \times 10^{24}$ kg を用いよ。

解答群

①　3 分　　②　90 分　　③　1 日　　④　10 日

⑤　30 日　　⑥　1 年　　⑦　3 年　　⑧　10 年

(6)　小物体 X が点 B において分解せず，そのままだ円軌道を描き運動する場合の周期を T' とする。ケプラーの第三法則を用いて，T' と T の比を求めよ。

［2014 広島大］

(1)　運動エネルギーの式「$K=\frac{1}{2}mv^2$」，万有引力による位置エネルギーの式

「$U=-G\frac{Mm}{r}$」より　$\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_0{}^2-G\frac{Mm}{h}=\frac{1}{2}mv_1{}^2-G\frac{Mm}{d}}$

(2)　ケプラーの第二法則より，面積速度は一定なので　$\frac{1}{2}v_0h=\frac{1}{2}v_1d$　……①

(1)の結果より

$$v_1{}^2=v_0{}^2-\frac{2GM}{h}+\frac{2GM}{d}=v_0{}^2-2GM\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{d}\right)=v_0{}^2-2GM\frac{d-h}{hd}$$

①式より　$v_0=\frac{d}{h}v_1$

よって　$v_0{}^2=\left(\frac{d}{h}\right)^2v_1{}^2=\left(\frac{d}{h}\right)^2\left(v_0{}^2-2GM\frac{d-h}{hd}\right)$

整理して　$\left\{1-\left(\frac{d}{h}\right)^2\right\}v_0{}^2=-\frac{2GMd(d-h)}{h^3}$

ゆえに　$v_0{}^2=\frac{h^2}{d^2-h^2}\frac{2GMd(d-h)}{h^3}=\frac{2GMd}{h(d+h)}$　したがって　$\boldsymbol{v_0=\sqrt{\frac{2GMd}{h(d+h)}}}$

(3)　小物体Yが地球から受ける万有引力の大きさは，万有引力の法則「$F=G\frac{Mm}{r^2}$」

より $\boldsymbol{\frac{GMm}{2d^2}}$ となる。

Yの運動方程式は　$\frac{m}{2}\frac{v_2{}^2}{d}=\frac{GMm}{2d^2}$　よって　$\boldsymbol{v_2=\sqrt{\frac{GM}{d}}}$

周期 T は，「$T=\frac{2\pi r}{v}$」より　$T=\frac{2\pi d}{v_2}=\boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{d^3}{GM}}}$

(4)　分裂の前後で運動量は保存するから　$mv_1=\frac{m}{2}v_2$　よって　$v_2=2v_1$

①式と，(2)，(3)の結果を用いると　$v_2{}^2=4v_1{}^2=4\left(\frac{h}{d}\right)^2v_0{}^2$

$$\frac{GM}{d}=4\left(\frac{h}{d}\right)^2\frac{2GMd}{h(d+h)}\quad 整理して\quad 1=\frac{8h}{d+h}\quad よって\quad \frac{d}{h}=\boldsymbol{7}$$

(5)　(3)より　$T=2\pi\sqrt{\frac{d^3}{GM}}=2\times3.14\times\sqrt{\frac{(7\times6.4\times10^6)^3}{\frac{20}{3}\times10^{-11}\times6.0\times10^{24}}}$

$=2\times3.14\times\sqrt{\frac{(7\times64\times10^5)^3}{20^2\times10^{12}}}=2\times3.14\times\frac{64\times8\times7\times10^7}{20\times10^6}\sqrt{70}$

$=3.14\times64\times8\times7\sqrt{70}\fallingdotseq3\times64\times8\times7\times8=24\times3584\ \mathrm{s}$

よって，およそ1日である。　……③

(6)　ケプラーの第三法則では，半長軸の 3 乗と周期の 2 乗の比が一定となる。よって，(4) の結果を用いて

$$\frac{d^3}{T^2}=\frac{\left(\dfrac{d+h}{2}\right)^3}{T'^2}$$

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2=\left(\frac{d+h}{2d}\right)^3=\left(\frac{1}{2}+\frac{h}{14h}\right)^3=\left(\frac{4}{7}\right)^3$$

ゆえに　$\dfrac{T'}{T}=\left(\dfrac{4}{7}\right)^{\frac{3}{2}}$