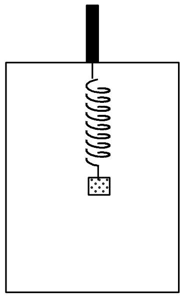
$\boxed{1}$　図のように，エレベーターの天井にばね定数 $k$ の軽いばねの一端を固定し，他端に質量 $m$ の物体を取りつけた。ばねの長さが自然の長さのときの物体の位置を原点 O とし，鉛直下向きに $x$ 軸をとり，エレベーター内の人から見た立場で，物体の運動について考える。重力加速度の大きさを $g$ として，次の文中の $\boxed{\phantom{ア}}$ 内に入れるのに適当なものを解答群の中から１つ選べ。



(1)　エレベーターが静止している場合について考える。ばねが自然の長さとなる位置まで物体を持ち上げて静かにはなすと，物体は鉛直方向に単振動した。振動の中心での物体の位置を $x_0$ とすると，$x_0 = \boxed{ア}$ である。物体の位置が $x$ のとき，物体にはたらく力は $k$，$x$，$x_0$ を用いて $\boxed{イ}$ と表されるので，この力が常に振動の中心に向かう $\boxed{ウ}$ であることがわかる。この場合の振動の周期は $\boxed{エ}$，振幅は $\boxed{オ}$ である。

(2)　次に，エレベーターが鉛直上向きの一定の加速度で上昇している場合について考える。この加速度の大きさを $a$ とする。ばねが自然の長さとなる位置まで物体を持ち上げて静かにはなすと，物体は力のつりあいの位置を中心として鉛直方向に単振動した。振動の中心での物体の位置を $x_1$ とすると，$x_1 = \boxed{カ}$ である。物体の位置が $x$ のときの物体の加速度は $m$，$k$，$x$，$x_1$ を用いて $\boxed{キ}$ と表される。この単振動の角振動数は $\boxed{ク}$ であり，(1) の場合と比較すると，周期は (エ) の $\boxed{ケ}$ 倍である。一方，振幅は $\boxed{コ}$ であり，振動の中心は，(1) の場合に比べて距離 $\boxed{サ}$ だけ $\boxed{シ}$ にずれている。

解答群　[1]　$mgk$　[2]　$\dfrac{mg}{k}$　[3]　$\dfrac{2mg}{k}$　[4]　$\dfrac{k}{mg}$　[5]　$mg - kx_0$

[6]　$-k(x + x_0)$　[7]　$k(x - x_0)$　[8]　$-k(x - x_0)$　[9]　$2\pi\sqrt{mk}$

[10]　$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　[11]　$2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　[12]　$\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　[13]　$\dfrac{m(g-a)}{k}$

[14]　$\dfrac{m(g+a)}{k}$　[15]　$\dfrac{2m(g+a)}{k}$　[16]　$\dfrac{k}{m(g+a)}$　[17]　$g - \dfrac{k}{m}x_1$

[18]　$-\dfrac{k}{m}(x + x_1)$　[19]　$\dfrac{k}{m}(x - x_1)$　[20]　$-\dfrac{k}{m}(x - x_1)$　[21]　$\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

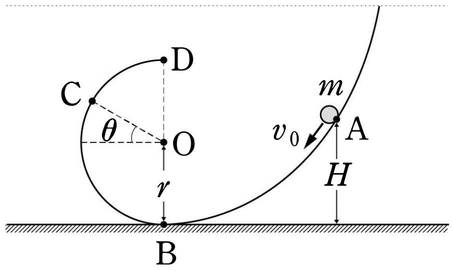
[22]　$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　[23]　$\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$　[24]　$2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　[25]　$mak$　[26]　$\dfrac{ma}{2k}$

[27]　$\dfrac{ma}{k}$　[28]　$\dfrac{k}{ma}$　[29]　$\dfrac{1}{4}$　[30]　$\dfrac{1}{2}$　[31]　1　[32]　2

[33]　慣性力　[34]　垂直抗力　[35]　復元力　[36]　重力　[37]　上

[38]　下

$\boxed{2}$ 1つの鉛直面内にあるなめらかなレールが水平面上に固定され，その上を質量 $m$ の小球が運動する。レールの BD 間は円の中心を O とした半径 $r$ の半円形であり，レール上の位置 C は OC と水平面のなす角が $\theta$ の位置にある $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$。小球は水平面からの高さ $H$ の位置 A から，斜め下向きに初速 $v_0$ で運動を開始する。重力加速度の大きさを $g$ として，次の問いについて答えよ。




(1) 小球が C に到達したとする。

(a) C における小球の速さ $v$ を求めよ。

(b) C で小球にはたらく遠心力の大きさを $v$ を用いて表せ。

(c) C で小球にはたらくレールからの垂直抗力の大きさを $m$，$r$，$\theta$，$g$，$v$ で表せ。

(2) 小球がレール上から離れないで D に到達するための条件を求める。

(a) $v_0 = 0$ の場合，小球が D に到達するために $H$ が満たすべき条件を求めよ。

(b) $v_0 \neq 0$ の場合，小球が D に到達するために $v_0$ が満たすべき条件を求めよ。ただし，$H$ は (2)(a) の条件を満たしていない大きさであるとする。

1 (1)(ア) 振動の中心は，物体にはたらく力がつりあう位置である。このときのばねの伸びが $x_0$ であるから，力のつりあいの式は

$$mg-kx_0=0 \qquad \text{よって} \quad x_0=\frac{mg}{k} \quad \cdots\cdots[2]$$

(イ) 位置 $x$ にある物体にはたらく力は，図 a のように大きさ $mg$ の重力と，大きさ $kx$ のばねの弾性力である。よって，物体にはたらく力は

$$mg-kx=kx_0-kx=-k(x-x_0) \quad \cdots\cdots[8]$$

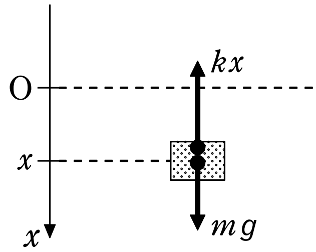


図 a

(ウ) 変位に比例して，振動の中心に向かう力であるから，これは復元力である。 ……[35]

(エ) 振動の中心 $x_0$ を原点とする座標 $X$ で表すと，復元力は $-kX$ と書ける。単振動の加速度の式「$a=-\omega^2x$」より，加速度を $\alpha_0$，角振動数を $\omega_0$ として

$$\alpha_0=-\frac{k}{m}X \quad \text{よって} \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

周期の式「$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$」より，求める周期は $\quad T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \quad$ ……[10]

(オ) 速さ 0 で，$x=0$ から振動し始めるので，振幅は $x_0=\dfrac{mg}{k}$ である。 ……[2]

(2)(カ) 鉛直上向きに加速度 $a$ で加速しているエレベーター内の物体には，鉛直下向きに大きさ $ma$ の慣性力がはたらくように見える。よって，力のつりあいの式は

$$mg+ma-kx_1=0$$

ゆえに $\quad x_1=\dfrac{m(g+a)}{k} \quad$ ……[14]

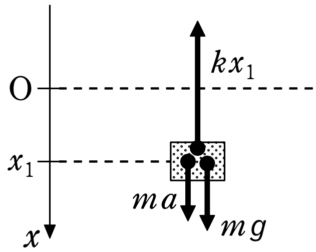


図 b

(キ) 求める加速度を $\alpha_1$ とすると，運動方程式は

$$m\alpha_1=m(g+a)-kx$$

(カ) を用いて $\quad m\alpha_1=-k(x-x_1) \qquad$ よって $\quad \alpha_1=-\dfrac{k}{m}(x-x_1) \quad$ ……[20]

(ク) 求める角振動数を $\omega_1$ とすると，単振動の加速度の式「$a=-\omega^2x$」より

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \cdots\cdots[22]$$

(ケ) 周期を $T_1$ とすると，「$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$」より $\quad T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

よって，(エ) の 1 倍である。 ……[31]

(コ) 速さ 0 で，$x=0$ から振動を始めているので，振幅は $x_1=\dfrac{m(g+a)}{k}$ である。

……[14]

(サ) (カ) と (ア) から $\quad x_1-x_0=\dfrac{ma}{k} \quad$ ……[27]

(シ) $x_1-x_0>0$ より，下にずれている。 ……[38]

$\boxed{2}$ (1)(a)　点 B の高さを重力による位置エネルギーの基準とする。点 A と点 C での力学的エネルギーの保存より

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+mgH=\frac{1}{2}mv^2+mgr(1+\sin\theta)$$

整理して　$v_0{}^2+2gH=v^2+2gr(1+\sin\theta)$

よって　$v=\boldsymbol{\sqrt{v_0{}^2+2g(H-r-r\sin\theta)}}$

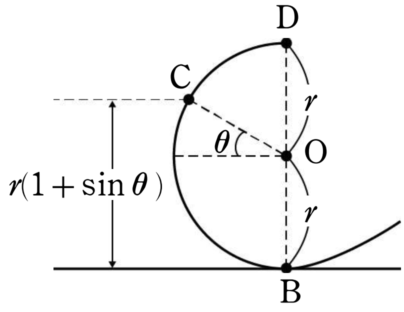


図 a

(b)　遠心力の式より　$\boldsymbol{F=m\frac{v^2}{r}}$

(c)　点 C において小球にはたらく垂直抗力の大きさを $N_{\mathrm{C}}$ とする。小球とともに運動する観測者には，円運動の法線方向の力がつりあっているように見えるので

$$m\frac{v^2}{r}-N_{\mathrm{C}}-mg\sin\theta=0$$

よって　$N_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{m\frac{v^2}{r}-mg\sin\theta}$

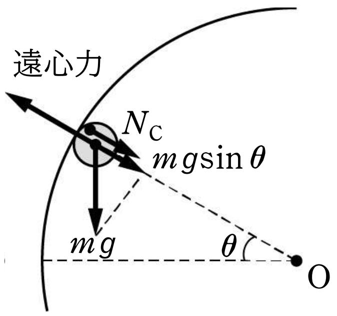


図 b

別解　水平面で静止している観測者には，小球は点 C を速さ $v$ で円運動しているように見えるので，円運動の運動方程式「$m\frac{v^2}{r}=F$」より　$m\frac{v^2}{r}=N_{\mathrm{C}}+mg\sin\theta$　よって　$N_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{m\frac{v^2}{r}-mg\sin\theta}$

(2)　点 D において小球にはたらく垂直抗力の大きさを $N_{\mathrm{D}}$ とする。点 D では $\theta=\frac{\pi}{2}$ であることと (1)(a)，(c) より　$N_{\mathrm{D}}=m\frac{v_0{}^2+2g(H-r-r)}{r}-mg=m\frac{v_0{}^2+g(2H-5r)}{r}$

小球が点 D に達するには $N_{\mathrm{D}}\geqq 0$ であればよい。

(a)　$v_0=0$ の場合

$$N_{\mathrm{D}}=m\frac{g(2H-5r)}{r}\geqq 0 \qquad \text{よって}\quad \boldsymbol{H\geqq\frac{5}{2}r}$$

(b)　$v_0\neq 0$ の場合

$$N_{\mathrm{D}}=m\frac{v_0{}^2+g(2H-5r)}{r}\geqq 0 \quad \text{よって}\quad v_0\geqq\sqrt{g(5r-2H)}$$

ただし，$H<\frac{5}{2}r$ である。