物理 ２次入試問題演習プリント（NO.1）　力学的エネルギーの保存と運動量の保存

1　台車上の小球の運動に関する次の問いに答えよ。なお，台車および小球の運動に対する空気抵抗の影響は無視できるものとする。

重力加速度の大きさを g として，文中の空欄に適する式を記入せよ。

(1)　図１のように，水平でなめらかな床の上に質量 M の台車があり，台車はストッパーで床に固定されている。台車上には高さ a のなめらかなすべり面が設置されており，すべり面の下端は水平で床から b だけ高い位置にある。すべり面の上端から質量 m の小球を静かにはなした。

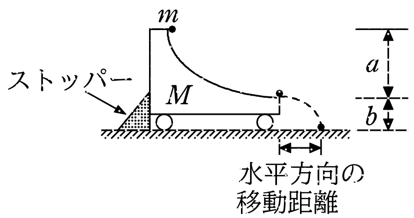


図１

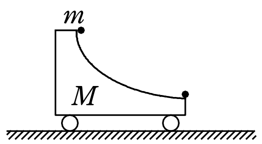


図２

小球がすべり面の下端に達したときの，床に対する小球の速さは $\boxed{\text{ア}}$ となる。水平方向に飛び出した小球が，台車を離れてから床に衝突するまでの時間は $\boxed{\text{イ}}$ となり，小球の水平方向の移動距離は $\boxed{\text{ウ}}$ となる。

(2)　次に，図２のようにストッパーを外して台車が自由に動ける状態にした。その後，台車が静止した状態で，すべり面の上端から小球を静かにはなした。小球がすべり面の下端に達したときの，床に対する小球の速さを u，台車の速さを V とすると，運動量保存則から以下の式が得られる。

$V = \boxed{\text{エ}}\, u$ ……①

また，力学的エネルギー保存則から，以下の式が得られる。

$\boxed{\text{オ}}$ ……②

ここで，①，② 式より，u および V は，m，M，g，a を用いて

$u = \boxed{\text{カ}}$ ……③

$V = \boxed{\text{キ}}$ ……④

と表される。

(3)　さらに，図３のようにすべり面の下端に質量の無視できる鉛直な壁を設置し，台車が静止した状態で，すべり面の上端から小球を静かにはなした。小球が鉛直な壁に衝突した直後において，床に対する小球の速さを u'，台車の速さを V' とすると，運動量保存則から，以下の式が得られる。

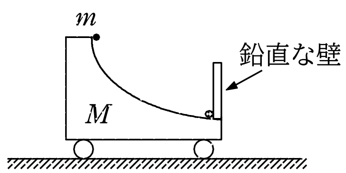


図３

$V' = \boxed{\text{ク}}\, u'$ ……⑤

また，はねかえり係数（反発係数）e は，以下の式で表される。

$e = \boxed{\text{ケ}}$ ……⑥

⑤，⑥ 式より，u' および V' は，u，V，e を用いて

$u' = \boxed{\text{コ}}$ ……⑦

$V' = \boxed{\text{サ}}$ ……⑧

と表される。鉛直な壁に衝突した小球はすべり面を上がりはじめる。すべり面の下端から小球の最高到達点までの高さは，e，a を用いて $\boxed{\text{シ}}$ と表される。

解答　(1)　(ア)　$\sqrt{2ga}$　　(イ)　$\sqrt{\dfrac{2b}{g}}$　　(ウ)　$2\sqrt{ab}$　　(2)　(エ)　$\dfrac{m}{M}$

(オ)　$mga=\dfrac{1}{2}mu^2+\dfrac{1}{2}MV^2$　　(カ)　$\sqrt{\dfrac{2Mga}{M+m}}$　　(キ)　$\sqrt{\dfrac{2m^2ga}{M(M+m)}}$

(3)　(ク)　$\dfrac{m}{M}$　　(ケ)　$\dfrac{u'+V'}{u+V}$　　(コ)　eu　　(サ)　eV　　(シ)　e^2a

解説

運動量を考えるときは，速さではなくベクトル量の速度を用いなければならず，問題において，速さで与えられていれば速度に直すこと。水平方向について内力だけがはたらく場合は，運動量の水平成分はずっと保存している。

(1)　台車が固定されている場合である。

(ア)　求める速さを v とする。すべり面の下端を重力による位置エネルギーの基準として，力学的エネルギー保存則を用いると

$$0+mga=\frac{1}{2}mv^2+0$$

よって　$v=\boldsymbol{\sqrt{2ga}}$

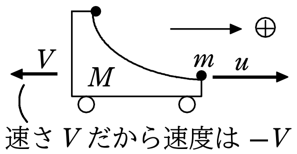
(イ)　水平方向に飛びだしたあと，鉛直方向は自由落下運動をするから，求める時間を t として，「$y=\frac{1}{2}gt^2$」より

$$b=\frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{よって} \quad t=\boldsymbol{\sqrt{\frac{2b}{g}}}$$

(ウ)　水平方向は等速直線運動だから，求める距離 x は「$x=vt$」より

$$x=v\cdot t=\sqrt{2ga}\cdot\sqrt{\frac{2b}{g}}=\boldsymbol{2\sqrt{ab}}$$

(2)　台が自由に動ける場合である。右向きを正とすると，床に対する小球の速度は u，台車の速度は $-V$ となる。



図ａ

(エ)　運動量保存則より

$$m\cdot 0+M\cdot 0=mu+M(-V)$$

よって　$V=\boldsymbol{\dfrac{m}{M}}u$　……①

(オ)　力学的エネルギー保存則より

$$\boldsymbol{mga=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}MV^2} \quad \cdots\cdots②$$

(カ)　① 式を ② 式に代入して

$$mga=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}u\right)^2$$

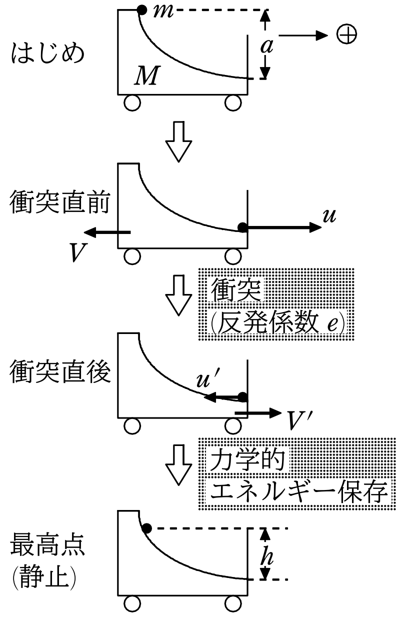
$$=\frac{1}{2}mu^2\cdot\frac{M+m}{M}$$

よって　$u=\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{2Mga}{M+m}}}$　……③

(キ)　③ 式を ① 式に代入して

$$V=\frac{m}{M}u=\boldsymbol{\sqrt{\frac{2m^2ga}{M(M+m)}}} \quad \cdots\cdots④$$

(3)　台車上の壁と衝突した直後の速度は，右向きを正とすると，小球は $-u'$，台車は V' となる。



図ｂ

(ク)　運動量保存則より

$$0=mu+M(-V)$$

$$=m(-u')+MV'$$

よって　$V'=\boldsymbol{\dfrac{m}{M}}u'$　……⑤

(ケ)　反発係数は，衝突直前直後の速度を用いて

$$e=-\frac{-u'-V'}{u-(-V)}=\boldsymbol{\frac{u'+V'}{u+V}} \quad \cdots\cdots⑥$$

(コ)　⑥ 式より

$$u'+V'=e(u+V)$$

これに ⑤ 式を代入して

$$u'+\frac{m}{M}u'=e(u+V)$$

よって　$u'=\dfrac{eM}{M+m}(u+V)$

ここで ① 式を代入して整理すると

$$u'=\frac{eM}{M+m}\cdot\frac{M+m}{M}u=\boldsymbol{eu} \quad \cdots\cdots⑦$$

(サ)　(コ) と同様にして

$$V'=\frac{m}{M}u'=\frac{m}{M}\cdot eu=e\cdot\frac{m}{M}u=\boldsymbol{eV} \quad \cdots\cdots⑧$$

(シ)　小球を静かにはなしたとき，壁に衝突する前後，そして，小球が最高点 (高さを h とする) に達するまで，ずっと水平方向の運動量は保存するから，小球が最高点に達したとき，小球も台も静止する。

壁に衝突した直後と，小球が最高点に達したときとで力学的エネルギー保存則を用いて

$$\frac{1}{2}mu'^2+\frac{1}{2}MV'^2=mgh$$

$$\text{左辺}=\frac{1}{2}m(eu)^2+\frac{1}{2}M(eV)^2=e^2\left(\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}MV^2\right)$$

② 式を用いると

左辺$=e^2\cdot mga$　　よって　$h=\boldsymbol{e^2a}$

参考　高さ a から小球を自由落下させ，反発係数 e の床に衝突させたときの，はねあがる高さ h を求めるのと同じ結果になる。