$\boxed{1}$［1992 東京電機大］

水平でまっすぐなレール上に人の乗った台車がある。台車は静止していた状態から一定の加速度 a で走りだした。台車が距離 l 走ったところで，人は進行方向斜め上方に軽いボールを投げ上げた。その後，同じ加速度でさらに距離 $3l$ 走ったところで，人はちょうど台車の上に落ちてきたボールを受け止めた。空気の抵抗はないものとし，重力加速度を g とする。

(1)　ボールを投げたときの台車の速さはいくらか。

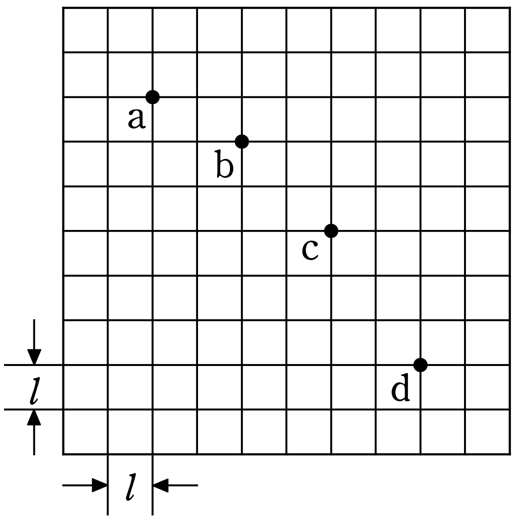
(2)　ボールを投げてから受け止めるまでの時間はいくらか。

(3)　地上から見て，投げられたボールの最高点における速さはいくらか。

(4)　台車から見て，ボールの投げ出された方向と水平方向とのなす角度を θ とするとき，$\tan\theta$ の値はいくらか。

$\boxed{2}$［2003 東京水産大］

地上のある高さから水平方向へ初速度 V_0〔m/s〕で投げたボールの軌跡を，図のような格子の長さが l〔m〕の方眼紙に記録したところ，その軌跡が a，b，c，d の各点を通ることが分かった。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕として以下の問いに答えよ。ただし，ボールにはたらく空気の抵抗は無視できるものとする。



(1)　ボールが a，b，c，d の各隣接する 2 点間を通過する時間はいくらか。

(2)　ボールの初速度 V_0 はいくらか。

(3)　投げた地点から a 点までの水平距離と鉛直距離は，それぞれいくらか。

$\boxed{1}$ [1992 東京電機大]

(1)　求める速さを v とすると　$v^2=2al$　　ゆえに　$v=\sqrt{\boldsymbol{2al}}$

(2)　求める時間を t とすると　$3l=vt+\frac{1}{2}at^2$　　ゆえに　$at^2+2vt-6l=0$

$t>0$ であるから　$t=\frac{-v+\sqrt{v^2+6al}}{a}=\frac{-\sqrt{2al}+\sqrt{8al}}{a}=\frac{\sqrt{2al}}{a}=\sqrt{\boldsymbol{\frac{2l}{a}}}$

(3)　投げたボールの速度の水平成分を v_x とすると

$$3l=v_xt \qquad ゆえに \quad v_x=\frac{3l}{t}=\frac{3al}{\sqrt{2al}}=\frac{3}{2}\sqrt{2al}$$

最高点での速度は v_x に等しいから　$\boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{2al}}$

(4)　投げた瞬間のボールの速度の鉛直成分を v_y とすると

$$v_yt-\frac{1}{2}gt^2=0, \qquad v_y=\frac{gt}{2}=\frac{g\sqrt{2al}}{2a}$$

ボールの台車に対する相対速度の水平成分を u_x，鉛直成分を u_y とすると

$$u_x=v_x-v=\frac{3}{2}\sqrt{2al}-\sqrt{2al}=\frac{\sqrt{2al}}{2}, \quad u_y=v_y=\frac{g\sqrt{2al}}{2a}$$

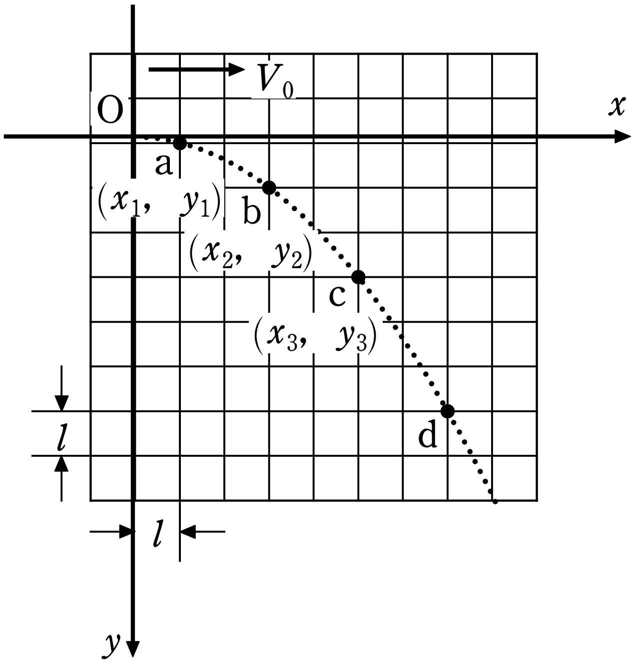
$$ゆえに \quad \tan\theta=\frac{u_y}{u_x}=\frac{g\sqrt{2al}}{2a}\times\frac{2}{\sqrt{2al}}=\boldsymbol{\frac{g}{a}}$$

$\boxed{2}$ [2003 東京水産大]

水平投射の問題なので，水平方向に等速運動，鉛直方向に自由落下ということを認識していれば必ず手がかりは得られる。ただこの問題では，投げ出した地点(原点)が与えられていないので，最初に a 点を通過するまでの時刻と，以降の各区間を通過する時間が同じとは言えないことに注意する。

したがって，あらかじめ原点の位置を仮定して解析的に座標の問題として解けばよい。また放物線は，3 点が指定されればただ 1 つ確定するので，考察にあたり全ての点を考える必要はない。ここでは，点 a，b，c の 3 点に注目し，下図のように各座標をそれぞれ，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ としよう。

与えられた図より次のことがわかる。a～d 各区間の水平方向の間隔が等しく，水平方向に等速なので，各区間を通過する時間 $\varDelta t$〔s〕が同じである。



したがって，a 点を通過する時刻を t_1 とすれば，図の目盛りより，

a 点について　$x_1 = V_0 t_1$，$y_1 = \dfrac{1}{2} g {t_1}^2$

b 点について　$x_2 = x_1 + 2l = V_0(t_1 + \varDelta t)$，

$$y_2 = y_1 + l = \frac{1}{2} g (t_1 + \varDelta t)^2$$

c 点について　$x_3 = x_1 + 4l = V_0(t_1 + 2\varDelta t)$，

$$y_3 = y_1 + 3l = \frac{1}{2} g (t_1 + 2\varDelta t)^2$$

が成り立つ。

また軌道の式 $y = \dfrac{g}{2V^2} \cdot x^2$ を用いて，各点の x と y の関係をおさえておけばよい。

(1)　水平方向に等速運動，水平方向の隣接する区間の距離が同じなので，通過時間 $\varDelta t$ は同じで　$2l = V_0 \varDelta t$　が成り立つ。したがって　$\varDelta t = \dfrac{2l}{V_0}$〔s〕

(2)　上記の各 a，b，c の y 座標について，　$y_2 - y_1 = \dfrac{1}{2} g \left\{ (t_1 + \varDelta t)^2 - {t_1}^2 \right\}$

よって　$l = \dfrac{1}{2} g (2t_1 + \varDelta t) \cdot \varDelta t$　……①　　$y_3 - y_2 = \dfrac{1}{2} g \left\{ (t_1 + 2\varDelta t)^2 - (t_1 + \varDelta t)^2 \right\}$

よって　$2l = \dfrac{1}{2} g (2t_1 + 3\varDelta t) \cdot \varDelta t$　……②　が成り立つ。②−① 式より

$$l = \frac{1}{2} g \cdot 2\varDelta t \cdot \varDelta t \qquad \text{ゆえに} \quad g(\varDelta t)^2 = l \qquad \varDelta t = \sqrt{\frac{l}{g}}\ 〔\mathrm{s}〕$$

(1) より　$\dfrac{2l}{V_0} = \sqrt{\dfrac{l}{g}}$　（(1) の答えとしてこの式を書いても誤りではない）　したがって　$V_0 = 2l\sqrt{\dfrac{g}{l}} = 2\sqrt{gl}$〔m/s〕

(3)　軌道の式に (2) の V_0 を代入すると　$y = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{g}{(2\sqrt{gl})^2} \cdot x^2$　　ゆえに　$y = \dfrac{1}{8l} \cdot x^2$

a 点について，求める水平距離を x_1，鉛直距離を y とおくと

$$y_1 = \frac{1}{8l} {x_1}^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

また b 点について　$y_2 = \dfrac{1}{8l} {x_2}^2$　つまり　$y_1 + l = \dfrac{1}{8l}(x_1 + 2l)^2$　……④

④−③ より $\qquad l=\dfrac{1}{8l}\{(x_1+2l)^2-x_1{}^2\}$

ゆえに　$l=\dfrac{1}{8l}(2x_1+2l)\cdot 2l$

整理して　$2l=x_1+l$

よって　$\boldsymbol{x_1=l}$ **〔m〕**（**水平距離**）

これを ③ に代入すると

$$y_1=\frac{1}{8l}\cdot l^2=\boldsymbol{\frac{1}{8}l}$$ **〔m〕**（**鉛直距離**）