$\boxed{1}$ [日本大]

ある駅を初速度 0 で出発した電車が，2 つの信号機 A と B とをそれぞれ速度 v_{A} と v_{B} で通過した。

ただし，軌道は直線であり，電車は駅と信号機 A との間では時間に対し一定の割合で速度を増し，信号機 A と B の間では同じ割合で速度を減らした。

(1)　駅と信号機 A との間の距離を x_{A} とし，電車の加速度の大きさを v_{A} と x_{A} で表せ。

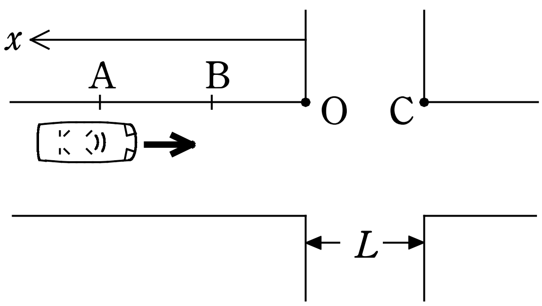
(2)　電車が駅を出発してから信号機 A を通過するまでの時間を v_{A} と x_{A} で表せ。

(3)　駅と信号機 B との距離を x_{B} とし，x_{B} の x_{A} に対する比を v_{A} と v_{B} で表せ。

(4)　電車の速度は駅からの距離に対してどのように変化するか。おおよその変化を図に描け。

$\boxed{2}$ [1993 工学院大]

自動車が交差点にさしかかった際に信号が黄色に変化し，停止すべきかそのまま進行すべきか判断に迷うことがある。信号が黄色になったとき運転者の対応には 2 つある。1 つはブレーキを踏んで交差点の前で停止しようとすることである。しかし，交差点の寸前で急ブレーキをかければ，かえって追突などされる危険性がある。ここでは減速の加速度は一定で大きさは α 以下であるとする。2 つめはなるべく速やかに，必要なら少し加速して，信号が赤になる前に交差点を通り抜けてしまうことである。もちろん，これができるのは既に交差点の寸前にきているときだけである。ここでは脱出のための加速の加速度は一定とし大きさは β 以下であるとする。



ところが停止しようとすると加速度の大きさが α より大きく急ブレーキになり，無理に通り抜けようとすると加速度の大きさが β より大きくなって危険な運転になる領域が存在しうる。これをジレンマ区間とよぶ。もちろん，この区間の大きさは交差点の広さ(右図の OC$=L$)，黄信号の点灯時間 τ，そして信号が黄色に変わった瞬間の自動車の速さ V による。ゆっくりと安全速度で運転していればこのジレンマ区間は小さいか全くなくなる。

いま，上の図で自動車が左の方の道路から交差点に進入してくる。以下では自動車の大きさは考えない。自動車は停止する場合は交差点の角 O 点で止まる。この交差点左方の道路に A 点， B 点を次のように定義する。自動車は信号が変化した時点で A 点より左方にいれば停止でき，また，その時点で自動車が B 点より右方にいれば信号が赤に

なる前に交差点を通過し， C 点より先に進めるとする。A より左を停止区間， B より右を通過区間とよぶ。もし図のように A が B より左方にあれば，この A と B の間が問題のジレンマ区間である。

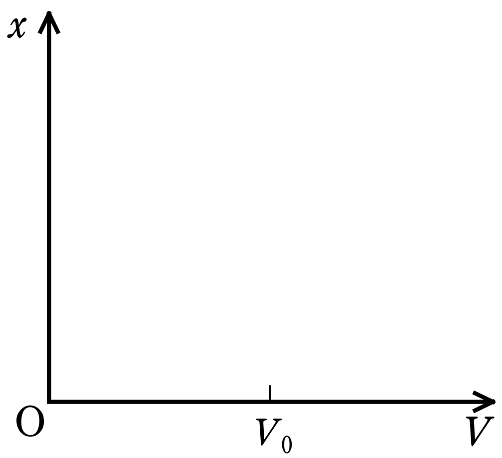
以下の問いに答えよ。使用できる記号は問題文中で定義された記号に限る。なお，$\beta\tau^2 > 2L$ とする。

(1)　距離 OA を求めよ。

(2)　距離 OB を求めよ。

(3)　ジレンマ区間の長さ AB が 0 となる V を V_0 とする。V_0 を求めよ。

(4)　図のように， O から A 方向に測った距離を x とする。いま，α，β，L の値は固定しておく。(A) 停止区間，(B) 通過区間，(C) ジレンマ区間，(D) 停止･通過双方可能な区間の４つの区間に対応する領域を，横軸を V，縦軸を x とする平面 (右図) の中に表せ。平面を適切に４つの領域に区分し，各領域内に (A)～(D) の記号を記入して解答せよ。



$\boxed{1}$ [日本大]

(1)　電車の加速度の大きさを a とおくと

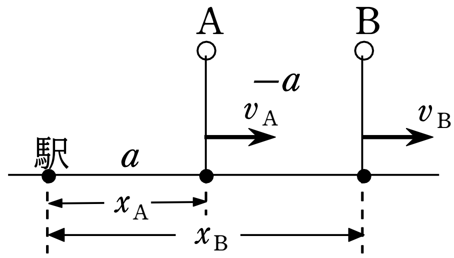
$v_A = at$ …… ①,　　$x_A = \frac{1}{2}at^2$ …… ②　　①，② 式より t を消去して　$a = \dfrac{\boldsymbol{v_A}^2}{\boldsymbol{2x_A}}$

$\boxed{\text{別解}}$　${v_A}^2 - 0^2 = 2ax_A$　　ゆえに　$a = \dfrac{\boldsymbol{v_A}^2}{\boldsymbol{2x_A}}$

(2)　① 式に上の a を代入して　　$t = \dfrac{v_A}{a} = v_A \cdot \dfrac{2x_A}{{v_A}^2} = \dfrac{\boldsymbol{2x_A}}{\boldsymbol{v_A}}$

$\boxed{\text{別解}}$　駅から A までの平均の速さは $\dfrac{0+v_A}{2} = \dfrac{1}{2}v_A$ だから　　$t = \dfrac{x_A}{\frac{1}{2}v_A} = \dfrac{\boldsymbol{2x_A}}{\boldsymbol{v_A}}$

(3)　信号機 A と B の間の加速度は $-a$ であるから



$${v_B}^2 - {v_A}^2 = 2\times(-a)\times(x_B - x_A)$$

$$= -\frac{{v_A}^2}{x_A}(x_B - x_A) = {v_A}^2\left(1 - \frac{x_B}{x_A}\right)$$

ゆえに　$\dfrac{{v_B}^2}{{v_A}^2} - 1 = 1 - \dfrac{x_B}{x_A}$　よって　$\dfrac{x_B}{x_A} = \boldsymbol{2 - \dfrac{{v_B}^2}{{v_A}^2}}$

$\boxed{\text{別解}}$　${v_B}^2 - {v_A}^2 = 2\times(-a)\times(x_B - x_A)$　　　${v_A}^2 = 2\times a\times x_A$

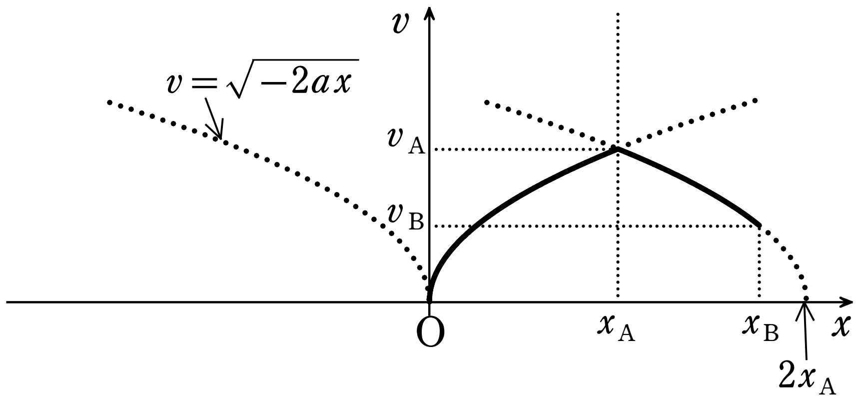
辺々割ると　$\dfrac{{v_B}^2}{{v_A}^2} - 1 = -\left(\dfrac{x_B}{x_A} - 1\right)$　　ゆえに　$\dfrac{x_B}{x_A} = \boldsymbol{2 - \dfrac{{v_B}^2}{{v_A}^2}}$

(4)　$0 \leqq x \leqq x_A$ のとき　$v^2 = 2ax$　　ゆえに　$v = \sqrt{2ax}$

$x_A \leqq x \leqq x_B$ のとき　$v^2 - {v_A}^2 = 2\times(-a)\times(x - x_A)$

ゆえに　$v^2 = {v_A}^2 - 2a(x - x_A) = 2ax_A - 2ax + 2ax_A = -2a(x - 2x_A)$

したがって，$v^2 = -2ax$ のグラフを $2x_A$ だけ平行移動したグラフとなる(下図参照)。$x = x_A$ のとき $v = v_A$，$x = x_B$ のとき $v = v_B$ であるから，これらの点をつなげばよい。$x = x_A$ で対称となる。下図の実線部分が答えとなる。



$\boxed{2}$ [1993 工学院大]

(1)　$\mathrm{OA}=x_{\mathrm{A}}$ とすると，初速度 V，加速度 $-\alpha$ の等加速度運動であるから

$$V^2-0=2\alpha x_{\mathrm{A}} \qquad \text{ゆえに} \quad x_{\mathrm{A}}=\boldsymbol{\frac{V^2}{2\alpha}}$$

(2)　$\mathrm{OB}=x_{\mathrm{B}}$ とすると，初速度 V，加速度 β の等加速度運動であるから

$$x_{\mathrm{B}}+L=V\tau+\frac{1}{2}\beta\tau^2 \qquad \text{ゆえに} \quad x_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{\tau V+\frac{1}{2}\beta\tau^2-L}$$

(3)　$x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}=0$，$V=V_0$ とおくと

$$\frac{{V_0}^2}{2\alpha}-\tau V_0-\frac{1}{2}\beta\tau^2+L=0$$

これより V_0 を求めると　$V_0=\alpha\tau\pm\sqrt{(\alpha\tau)^2-\alpha(2L-\beta\tau^2)}$

$V_0>0$，$\beta\tau^2>2L$ より　$V_0=\boldsymbol{\alpha\tau+\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)\tau^2-2\alpha L}}$

(4)　$x=\dfrac{V^2}{2\alpha}$ と $x=\tau V+\dfrac{1}{2}\beta\tau^2-L$ のグラフを描く。

$x>\dfrac{V^2}{2\alpha}$ では停止可能，

$x<\tau V+\dfrac{1}{2}\beta\tau^2-L$ では通過可能

であるから，(A)〜(D) の区間は右図のようになる。