演習1

$\boxed{1}$［2019 金沢工業大］

次の $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{ウ}}$ に解答群から最も適する答えを選んで，その番号を入れよ。また，$\boxed{\text{エ}}$ 〜 $\boxed{\text{ケ}}$ には適する数字を入れよ。$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ には 0 以外の数字を入れよ。必要ならば，四捨五入して答えよ。

軽油を消費するディーゼル機関の動力で発電する発電機がある。このディーゼル機関が外部にする仕事以外のエネルギーは，すべて熱として冷却水に吸収されるものとする。また，このディーゼル機関が外部にする仕事のうち，その p〔%〕が発電機で電気エネルギーに変換される。

このディーゼル機関の冷却水として，T_1〔℃〕の水を毎秒 M〔kg〕供給すると，その水は T_2〔℃〕になって排出される。水の比熱を $c=4.2\times10^3$ J/(kg·K) とすると，この冷却水に吸収される熱量は毎秒 $Q=$ $\boxed{\text{ア}}$〔J〕である。

このディーゼル機関に，毎秒 m〔kg〕の軽油が供給される。軽油を燃焼させたときに発生する熱量を軽油 1.0 kg 当たり q〔J〕とすると，このディーゼル機関の熱効率は $\boxed{\text{イ}}$ であり，発電機で発電される電気エネルギーは毎秒 $\boxed{\text{ウ}}$〔J〕である。

軽油の密度を 0.80 g/cm^3 とすると，毎秒 $m=1.5\times10^{-3}$ kg の軽油がディーゼル機関に供給されるとき，4.5×10^2 cm^3 の軽油で $\boxed{\text{エ}}.\boxed{\text{オ}}\times10^{\boxed{\text{カ}}}$ 秒間だけ発電できる。$p=75$ %，$q=4.6\times10^7$ J，$M=0.50$ kg，$T_1=10$ ℃，$T_2=40$ ℃ とすると，この時間の間に発電できる電気エネルギーは $\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{ク}}\times10^{\boxed{\text{ケ}}}$ J である。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

① $(T_2+T_1)Mc$　② $(T_2-T_1)Mc$　③ T_1T_2Mc　④ $\dfrac{T_1}{T_2}Mc$

⑤ $\dfrac{Mc}{T_2+T_1}$　⑥ $\dfrac{Mc}{T_2-T_1}$　⑦ $\dfrac{Mc}{T_1T_2}$　⑧ $\dfrac{T_2}{T_1}Mc$

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

① $\dfrac{p}{100}$　② $\dfrac{pQ}{100}$　③ $\dfrac{mq}{Q}$　④ $\dfrac{Q}{mq}$　⑤ $1-\dfrac{mq}{Q}$　⑥ $1-\dfrac{Q}{mq}$

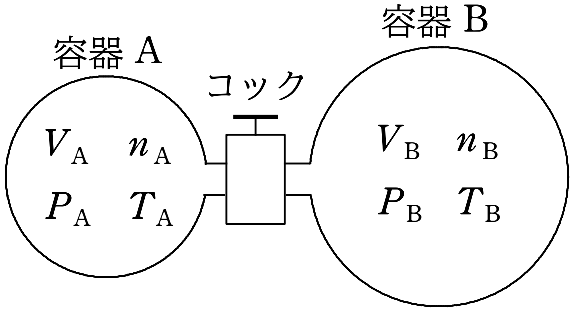
$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

① mq　② Q　③ $mq+Q$　④ $mq-Q$

⑤ $\dfrac{pmq}{100}$　⑥ $\dfrac{pQ}{100}$　⑦ $\dfrac{p(mq+Q)}{100}$　⑧ $\dfrac{p(mq-Q)}{100}$

$\boxed{2}$ ［2018 岩手大］

図のように，体積が V_{A}〔$\mathrm{m^3}$〕の容器 A と体積が V_{B}〔$\mathrm{m^3}$〕の容器 B がコックのついた細い管でつながっている。最初コックは閉じられており，容器Aには圧力 P_{A}〔Pa〕，温度 T_{A}〔K〕の単原子分子理想気体が n_{A}〔mol〕入っており，容器 B には圧力 P_{B}〔Pa〕，温度 T_{B}〔K〕の単原子分子理想気体が n_{B}〔mol〕入っている。このとき気体と容器，細い管，コックとの熱のやりとりはなく，細い管の体積はないものとする。



コックを開くと容器内の気体が混合し，平衡状態に達した。このとき容器内の気体の温度は T_{AB}〔K〕，圧力は P_{AB}〔Pa〕であった。

(1)　コックを開く前後で容器内の気体全体の内部エネルギーは保存される。T_{AB} を n_{A}，n_{B}，T_{A}，T_{B} を用いて表せ。

(2)　P_{AB} を P_{A}，P_{B}，V_{A}，V_{B} を用いて表せ。

コックを開いた後の容器 A 内には $\dfrac{1}{6}n_{\mathrm{A}}$〔mol〕，容器 B 内には $3n_{\mathrm{B}}$〔mol〕の気体が存在した。コックを開く前後で，容器 A 内と容器 B 内の気体の物質量の和に変化はない。

(3)　$\dfrac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}$ を有効数字 2 桁の数値で示せ。

(4)　T_{AB} は 5.4×10^2 K，P_{AB} は 2.7×10^4 Pa であった。また，コックを開く前，T_{B} は T_{A} の 3 倍であったとする。このときの T_{A}，P_{B} をそれぞれ有効数字 2 桁の数値で示せ。

3 ［2015 九州工業大］

図1のような半径 r の変形しない球形容器の中に，1 mol の単原子分子からなる理想気体が入っている。気体分子は容器の内壁と弾性衝突を行い，気体分子どうしの衝突はないものとする。また，容器の内壁はなめらかであり，気体分子に対する重力の影響は無視できるものとする。弾性衝突する各気体分子は球の中心を含むそれぞれの平面内を，図2のように運動する。以下，球形容器の中の気体分子の圧力，温度ならびに内部エネルギーを考える。アボガドロ定数を N_A，気体定数を R とする。円周率を π とする。

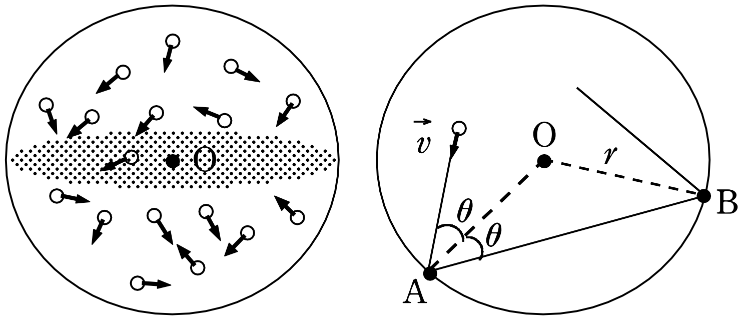


図1　図2

〔A〕 図2のように，質量 m の1個の分子が速度 $\vec{v}$（大きさ v）で，内壁上の点Aにおいて，球の中心Oと結ばれた線分OAと θ の角をなして衝突する。その後，内壁上の点Bで2回目の衝突をした後，同様の衝突をくり返すとする。次の問いに答えよ。なお，r，m，v，θ の中から必要な記号を用いて表せ。

(1) 点Aでの衝突で，分子が内壁に与える力積の大きさを求めよ。

(2) 1回目と2回目の衝突の間に分子が移動した距離を求めよ。

(3) 単位時間当たりにこの分子が衝突する回数を求めよ。

(4) 球形容器の内壁がこの1個の分子から単位時間当たりに受ける力積の大きさを求めよ。

〔B〕 次に1 mol の分子の場合を考える。すべての分子についても図1のような球形容器との衝突を考えればよい。しかし，実際には，速度 $\vec{v}$ の大きさや向きは分子によって異なるので，1 mol の分子について考えるときは，v^2 を平均値 $\overline{v^2}$ で置き換える必要がある。次の問いに答えよ。

(5) (4)で与えられた単位時間当たりの力積をすべての分子について足し合わせたものは，内壁が受ける力の大きさの総和になる。これを球形容器の内壁の面積で割ることで圧力 p が求められる。圧力 p を r，m，N_A，$\overline{v^2}$，π の中から必要な記号を用いて求めよ。

(6) 理想気体の状態方程式を用いることにより，気体分子1個当たりの平均運動エネルギー $\frac{1}{2}m\overline{v^2}$ を絶対温度 T を含んだ式で表せ。r，N_A，R，T，π の中から必要な記号を用いて表せ。

(7) 球形容器中の理想気体の内部エネルギー U を求めよ。r，N_A，R，T，π の中から必要な記号を用いて表せ。

〔C〕 (7) まで考えてきた球形容器中の 1 mol の理想気体に熱量 Q を加えた場合を考える。

(8)　理想気体の圧力変化 Δp を求めよ。なお，r，N_A，R，Q，π の中から必要な記号を用いて表せ。ただし，熱は容器から外へ移動しないものとする。

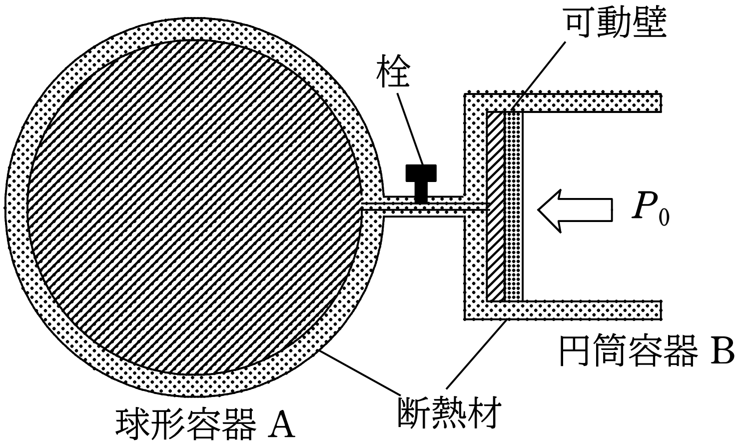


図３

次に図３のように，1 mol の単原子分子からなる理想気体が閉じ込められた体積不変の球形容器 A を円筒容器 B と栓のついた細い管を介してつなげた。

〔D〕 栓が閉じた状態での球形容器の中の圧力は P であり，容器 B の可動壁 (断面積 S) の左側には気体は存在しない。栓を徐々に開けていくと，容器 B の中の可動壁がゆっくり右側に移動し，ある所で静止した。容器 B の可動壁は右側より大気圧 P_0 で押されており，常に容器 B の中の気体の圧力とつりあっているものとする。球形容器 A の容積を V として，容器 B の中を可動壁が移動した距離を L とする。ただし，容器 B の可動壁は，容器 B の円筒の内壁と垂直であり，内壁にそってなめらかに動くものとする。また，可動壁を含む装置全体は断熱材でおおわれており，外部との熱のやり取りはないものとする。容器 A と容器 B の間の細い管の容積はないものとする。

(9)　気体の絶対温度の変化量 (可動壁が移動し静止した後の気体の絶対温度と移動前の気体の絶対温度の差) を，P_0，S，L，R を用いて表せ。

(10)　容器 B の中を可動壁が移動した距離 L を P，P_0，S，V を用いて表せ。

1

(ア)　熱量の式「$Q=mc\Delta T$」より　　$Q=M\times c\times(T_2-T_1)\ =(T_2-T_1)Mc$〔J〕　……②

(イ)　ディーゼル機関が1秒当たりに吸収する熱量および放出する熱量はそれぞれ mq〔J〕，Q〔J〕である。よって，熱効率の式「$e=\dfrac{Q_1-Q_2}{Q_1}$」を用いると

$$e=\frac{mq-Q}{mq}=1-\frac{Q}{mq}\quad\cdots\cdots⑥$$

(ウ)　ディーゼル機関が外部にする仕事以外のエネルギーはすべて熱として冷却水に吸収されるので，1秒当たりの仕事を W〔J〕とすると　　$W=mq-Q$〔J〕

その p〔%〕が電気エネルギーとなるので，発電機で発電される電気エネルギーは毎秒

$$(mq-Q)\times\frac{p}{100}=\frac{p(mq-Q)}{100}\text{〔J〕}\quad\cdots\cdots⑧$$

(エ)(オ)(カ)　1秒間に供給される軽油の質量は　$4.5\times10^2\times0.80=3.6\times10^2\ \mathrm{g}=0.36\ \mathrm{kg}$

よって，毎秒 1.5×10^{-3} kg の軽油がディーゼル機関に供給されるので，求める時間を t〔s〕とすると　$t=\dfrac{0.36}{1.5\times10^{-3}}=2.4\times10^2\ \mathrm{s}$　よって　(エ)　**2**　　(オ)　**4**　　(カ)　**2**

(キ)(ク)(ケ)　1秒間に発電できる電気エネルギーは，(ア)，(ウ) の結果を用いると

$$\frac{p(mq-Q)}{100}=\frac{p\{mq-(T_2-T_1)Mc\}}{100}$$

$$=\frac{75\times\{1.5\times10^{-3}\times4.6\times10^7-(40-10)\times0.50\times4.2\times10^3\}}{100}$$

$$=\frac{3}{4}\times(6.9\times10^4-6.3\times10^4)=4.5\times10^3\ \mathrm{J}$$　2.4×10^2 s 発電できるので

$4.5\times10^3\times2.4\times10^2=10.8\times10^5\fallingdotseq1.1\times10^6\ \mathrm{J}$　よって　(キ)　**1**　(ク)　**1**　(ケ)　**6**

2

(1)　単原子分子理想気体の内部エネルギーの式「$U=\dfrac{3}{2}nRT$」より，気体定数を R〔J/(K·mol)〕とおくと，コックを開く前後で容器内の気体全体の内部エネルギーが保存されることから

$$\frac{3}{2}n_\mathrm{A}RT_\mathrm{A}+\frac{3}{2}n_\mathrm{B}RT_\mathrm{B}=\frac{3}{2}(n_\mathrm{A}+n_\mathrm{B})RT_\mathrm{AB}$$

$(n_\mathrm{A}+n_\mathrm{B})T_\mathrm{AB}=n_\mathrm{A}T_\mathrm{A}+n_\mathrm{B}T_\mathrm{B}$　よって　$\boldsymbol{T_\mathrm{AB}=\dfrac{n_\mathrm{A}T_\mathrm{A}+n_\mathrm{B}T_\mathrm{B}}{n_\mathrm{A}+n_\mathrm{B}}}$〔K〕

(2)　理想気体の状態方程式「$pV=nRT$」より，コックを開いた後の状態方程式は

$P_\mathrm{AB}(V_\mathrm{A}+V_\mathrm{B})=(n_\mathrm{A}+n_\mathrm{B})RT_\mathrm{AB}$　これに (1) の結果を代入すると

$$P_{AB}(V_A+V_B)=(n_A+n_B)R\cdot\frac{n_AT_A+n_BT_B}{n_A+n_B}$$

$$P_{AB}(V_A+V_B)=R(n_AT_A+n_BT_B)\quad\cdots\cdots①$$

となる。ここで，コックを開く前の容器 A，B の状態方程式を考えると

$$P_AV_A=n_ART_A\quad\cdots\cdots②\qquad P_BV_B=n_BRT_B\quad\cdots\cdots③$$

① 式の右辺に ② 式，③ 式を代入すると　$P_{AB}(V_A+V_B)=P_AV_A+P_BV_B$

よって　$P_{AB}=\dfrac{P_AV_A+P_BV_B}{V_A+V_B}$ 〔Pa〕

(3)　物質量の和が変化しないことから　$n_A+n_B=\dfrac{n_A}{6}+3n_B$　$5n_A=12n_B$

これより　$n_A:n_B=12:5$

一方，コックを開いた後の容器 A，B 内の気体の状態方程式より

$$P_{AB}V_A=\frac{1}{6}n_ART_{AB}\quad\cdots\cdots④\qquad P_{AB}V_B=3n_BRT_{AB}\quad\cdots\cdots⑤$$

よって，⑤ 式÷④ 式と $n_A:n_B=12:5$ より　$\dfrac{V_B}{V_A}=\dfrac{3n_B}{\frac{1}{6}n_A}=\dfrac{18n_B}{n_A}=\dfrac{15}{2}=\mathbf{7.5}$

(4)　問題文より，$T_B=3T_A$ である。また，$n_A:n_B=12:5$ より $k>0$ として $n_A=12k$，$n_B=5k$ とおける。よって，(1) の結果から　$5.4\times10^2=\dfrac{12k\cdot T_A+5k\cdot 3T_A}{12k+5k}=\dfrac{27}{17}T_A$

ゆえに　$T_A=\dfrac{17}{27}\times5.4\times10^2=\mathbf{3.4\times10^2\ K}$　　また，② 式÷③ 式より

$$\frac{P_A}{P_B}\cdot\frac{V_A}{V_B}=\frac{n_A}{n_B}\cdot\frac{T_A}{T_B}$$

これに (3) の結果と，$T_B=3T_A$，$n_A=12k$，$n_B=5k$ を代入して

$\dfrac{P_A}{P_B}\times\dfrac{2}{15}=\dfrac{12k}{5k}\cdot\dfrac{T_A}{3T_A}$　整理して　$P_A=6P_B$　これと (2)，(3) の結果より

$2.7\times10^4=\dfrac{6P_B\cdot V_A+P_B\cdot7.5V_A}{V_A+7.5V_A}=\dfrac{13.5}{8.5}P_B$　よって　$P_B=\mathbf{1.7\times10^4\ Pa}$

$\boxed{3}$

〔A〕(1)　点 A に衝突する直前・直後における運動量ベクトルを始点をそろえてかくと，図 a のようになる。図 a のように，気体分子の運動量の変化の大きさは $2mv\cos\theta$ となる。
これは，気体分子が壁から受けた力積の大きさに等しく，作用反作用の法則から分子が内壁に与える力積の大きさに等しい。よって　$\boldsymbol{2mv\cos\theta}$

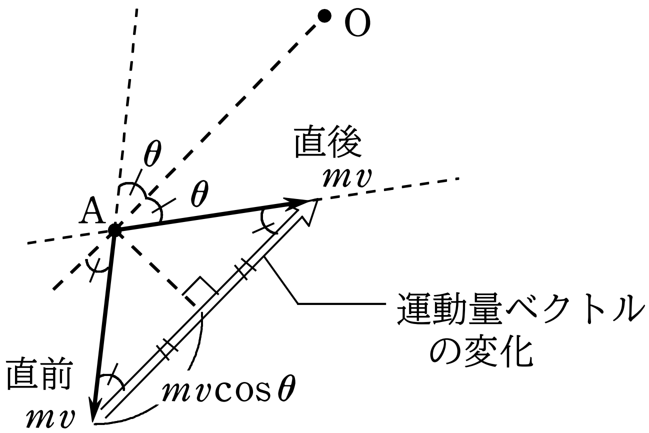
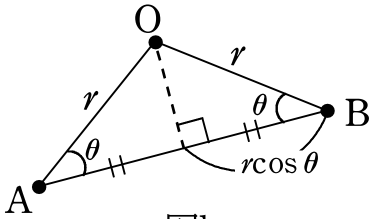


図 a

(2)　△OAB が二等辺三角形であることから (図 b)，
AB 間の距離を求めると　AB$=\boldsymbol{2r\cos\theta}$



図b

(3)　1 回目と 2 回目の衝突の間にかかる時間は，速さ v で AB 間を進むので $\dfrac{\mathrm{AB}}{v}$ である。

よって，単位時間では　$\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{AB}}{v}}=\dfrac{v}{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{\dfrac{v}{2r\cos\theta}}$〔**回**〕

(4)　1 回の衝突で $2mv\cos\theta$ の力積を受けるので，$\dfrac{v}{2r\cos\theta}$〔回〕では

$$2mv\cos\theta\times\frac{v}{2r\cos\theta}=\boldsymbol{\frac{mv^2}{r}}$$

〔B〕(5)　(4) より，すべての分子が内壁に与える単位時間当たりの力積の平均値は $\dfrac{m\overline{v^2}}{r}$ である。内壁が受ける単位時間当たりの力積の大きさの値は，内壁が受ける力の大きさの値に等しい (力積 $F\Delta t$ の $\Delta t=1$ の場合である) から，これを N_A 倍すると 1 mol の分子が内壁に及ぼす力の大きさが得られる。よって　$N_\mathrm{A}\dfrac{m\overline{v^2}}{r}$

これを半径 r の球形容器の内壁の面積 $4\pi r^2$ でわると　$p=\dfrac{N_\mathrm{A}\dfrac{m\overline{v^2}}{r}}{4\pi r^2}=\boldsymbol{\dfrac{N_\mathrm{A}m\overline{v^2}}{4\pi r^3}}$

(6)　球形容器の体積は $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ であるから，気体の状態方程式は

$$\frac{N_\mathrm{A}m\overline{v^2}}{4\pi r^3}\times\frac{4}{3}\pi r^3=1\times RT\qquad \text{よって}\quad \frac{1}{2}m\overline{v^2}=\boldsymbol{\frac{3RT}{2N_\mathrm{A}}}$$

(7)　単原子分子理想気体 1 mol の内部エネルギーは，分子 N_A 個分の運動エネルギーであるから　$U = N_A \times \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} \boldsymbol{RT}$

〔C〕(8)　定積変化であるから，体積が V_1 で一定であるとし，圧力が $\varDelta p$ 変化したとき温度が $\varDelta T$ 変化するとすれば，状態方程式より　$pV_1 = 1 \times RT$，

$(p + \varDelta p)V_1 = 1 \times R(T + \varDelta T)$　なので　$\varDelta p = \frac{R}{V_1} \varDelta T$　…… ①

一方，定積変化で気体は仕事をしないため，内部エネルギーの変化を $\varDelta U$ とすれば，熱力学第一法則より　$\varDelta U = Q$　(7) より　$\varDelta U = \frac{3}{2} R \varDelta T$ となるから

$Q = \frac{3}{2} R \varDelta T$　…… ②　①，② 式より　$\varDelta p = \frac{R}{\frac{4}{3}\pi r^3} \times \frac{2Q}{3R} = \boldsymbol{\frac{Q}{2\pi r^3}}$

〔D〕(9)　容器 B 内の気体は大気圧 P_0 に抗して，外部に $P_0 SL$ の仕事をする。外部との熱のやり取りはないため，絶対温度の変化を $\varDelta T$ とすれば，熱力学第一法則「$\varDelta U = Q + W$」から　$\frac{3}{2} R \varDelta T = 0 - P_0 SL$　よって　$\varDelta T = -\boldsymbol{\frac{2P_0 SL}{3R}}$

(10)　可動壁が移動する前の絶対温度を T として，移動の前後でそれぞれ気体の状態方程式を立てると

$PV = RT$

$P_0(V + SL) = R(T + \varDelta T)$　ここで (9) の結果を用いると

$P_0(V + SL) = RT + R\varDelta T = PV - \frac{2}{3} P_0 SL$　となり　$P_0 V + P_0 SL = PV - \frac{2}{3} P_0 SL$

よって　$\frac{5}{3} P_0 SL = (P - P_0)V$　ゆえに　$L = \boldsymbol{\frac{3(P - P_0)V}{5P_0 S}}$