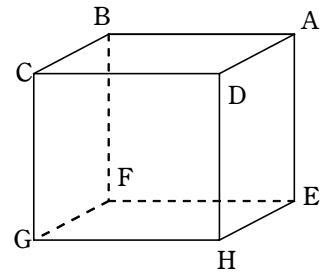


2021 年日本数学オリンピック予選 模擬試験問題

実施日：2021 年 1 月 5 日 試験時間 3 時間 12 題

- 1 凸四角形 ABCD は、 $AB=3$ 、 $BC=4$ 、 $CD=5$ 、 $DA=6$ 、 $\angle ABC=90^\circ$ をみたす。ABCD の面積を求めよ。
- 2 $11^{12^{13}}$ の十の位を求めよ。ただし、 $11^{12^{13}}$ とは 11 の 12^{13} 乗のことであり、 11^{12} の 13 乗のことではない。
- 3 97、100、103 で割った余りがそれぞれ 32、33、34 である正の整数のうち最小のものを求めよ。
- 4 点 P は三角形 ABC の内部にあって、 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$ となっている。この三角形の辺の長さは $AB=13$ 、 $BC=14$ 、 $CA=15$ であり、 $\tan \angle PAB=\frac{m}{n}$ であって、 m 、 n は互いに素な正の整数である。 $m+n$ を求めよ。
- 5 与えられた正 $(2n+1)$ 角形の頂点から、相異なる 3 点を無作為に同様な確からしきで選ぶ。与えられた正 $(2n+1)$ 角形の中心が、この 3 点を頂点とする三角形の内部にある確率を求めよ。

- 6 図のような 1 辺の長さ 1 の立方体 ABCD-EFGH があり、辺 CD の中点を K、辺 DH の中点を L、辺 EF の中点を M、辺 FB の中点を N とする。八面体 A-KLMN-G の体積を求めよ。



- 7 $f(x)$ は、0、1 以外の実数に対して定義された実数値をとる関数であって、0、1 以外のすべての実数 x に対して

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{x}$$

が成立する。 $f(x)$ を求めよ。

8 種類のお菓子 A, B がそれぞれ 24 個ずつある。これを X, Y, Z の 3 人で余りなく分けることにした。ここで、ある人が 1 個ももらわないお菓子の種類があってもよい。X, Y, Z の 3 人のうちに、以下の条件をみたす 2 人が**存在しない**ような分け方は何通りあるか。

条件：2 人のうち 1 人は A を a 個, B を b 個もらい, もう 1 人は A を a' 個, B を b' 個もらうとき, $a \leq a'$ かつ $b \leq b'$ かつ $a + b < a' + b'$ が成り立っている。

9 平面上に 5 つの点 A, B, C, D, E があり, どの 3 点も一直線上にはないとする。4 本の線分によってこれらの点を結ぶことを考える。どの点も少なくともひとつの線分の端点となっているような結び方は何通りあるか。

10 7 人の政治家がおり, いくつかの派閥がある。派閥とは 1 人以上の政治家が属する集団である。2 つの派閥は, もしその両方に属する政治家と, どちらにも属さない政治家がともに存在すれば, 必ず一方が他方を含むという。派閥の個数の最大値を求めよ。
ただし, 7 人全員からなる集団も派閥であるとする。

11 $k = 1, 2, \dots, 2019^3$ に対して, 正の整数 m であって km を 2019^3 で割った余りが m より大きいものの個数を $f(k)$ とする。このとき, $f(1), f(2), \dots, f(2019^3)$ のうちに現れる数は何種類あるか。

12 凸四角形 ABCD は $AD = CD, BD = BC, \angle ADC = 168^\circ, \angle ABC = 66^\circ$ をみたす。
 $\angle BAD$ を求めよ。

2021 年日本数学オリンピック予選 模擬試験問題 解答用紙

年 名前

| | |
|----|--|
| 1 | JMO_2007_予選_1 18 |
| 2 | JMO_2007_予選_2 2 |
| 3 | JMO_2019_予選_5 333033 |
| 4 | AIME_1999_問14 (オリンピック辞典 P.224_基礎3.2.49) 463 |
| 5 | USAMO_1973_問3 (オリンピック辞典P.317_基礎4.2.24) $\frac{n+1}{4n-2}$ |
| 6 | JMO_2000_予選_5 $\frac{1}{2}$ |
| 7 | JMO_2004_予選_6 $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{2x(x-1)}$ |
| 8 | JMO_2013_予選_6 14017 |
| 9 | JMO_1995_予選_7 (数学オリンピック辞典_P319_基礎4.2.30) 135 通り |
| 10 | JMO_2004_予選_9 23 |
| 11 | JMO_2019_予選_11 25 種類 |
| 12 | JMO_2004_予選_11 54 |