

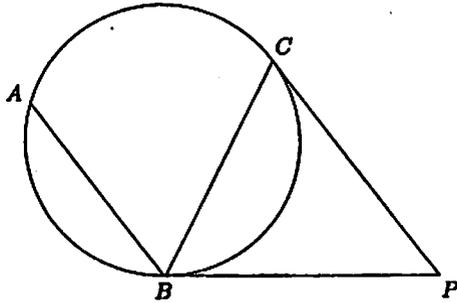
2015年日本数学オリンピック予選

(公財) 数学オリンピック財団

問題¹

2015年1月12日 試験時間3時間12題 (答のみを記入する)

- 6000の正の約数であって、平方数でないものはいくつあるか。
- 円周上に3点 A, B, C があり、点 P を B と C における円の接線の交点とする。直線 AB と直線 CP が平行であり、 $AB = 3, BP = 4$ のとき、線分 BC の長さを求めよ。
ただし、 XY で線分 XY の長さを表すものとする。



- 正の整数 a, b, c, d, e が

$$a < b < c < d < e < a^2 < b^2 < c^2 < d^2 < e^2 < a^3 < b^3 < c^3 < d^3 < e^3$$

をみたすとき、 $a+b+c+d+e$ のとりうる最小の値を求めよ。

- 3×3 のマス目の各マスに、1以上9以下の相異なる整数を1つずつ書き込む。各行および各列に並ぶ整数の和がすべて3の倍数になるような書き込み方は何通りあるか。ただし、回転や裏返しにより一致する書き込み方も異なるものとして数える。
- 以下の式の値を、有理数 a, b を用いて、 $a+b\sqrt{2}$ の形で表せ。

$$\frac{(1 \times 4 + \sqrt{2})(2 \times 5 + \sqrt{2}) \cdots (10 \times 13 + \sqrt{2})}{(2 \times 2 - 2)(3 \times 3 - 2) \cdots (11 \times 11 - 2)}$$

- 正の整数 a, b, c が次の4つの条件をみたすとする：

- a, b, c の最大公約数は1である。
- $a, b+c$ の最大公約数は1より大きい。
- $b, c+a$ の最大公約数は1より大きい。
- $c, a+b$ の最大公約数は1より大きい。

このとき、 $a+b+c$ のとりうる最小の値を求めよ。

- l を xy 平面上の直線とする。 20×15 個の点 (m, n) ($m = 1, 2, \dots, 20, n = 1, 2, \dots, 15$) のうち少なくとも1つを通り l と平行な直線はちょうど222本存在した (ただし、 l 自身も l と平行な直線とみなす)。このとき、これらの点のうち少なくとも1つを通り l と垂直な直線は何本存在するか。
- 平面上に5点 A, B, C, D, P があり、このうち A, B, C, D はこの順に同一直線上に並んでいる。また、 $AB = BC = CD = 6, PB = 5, PC = 7$ をみたしている。三角形 PAC の外接円と三角形 PBD の外接円の交点のうち P でない方を Q とおくと、線分 PQ の長さを求めよ。
ただし、 XY で線分 XY の長さを表すものとする。
- 1以上2015以下の整数が2つずつあり、これらを一列に並べた。この列から2015個の整数を選び、順番を保って並べたものを半列とよぶ。このとき、相異なる半列の個数としてありうる最大の値を求めよ。ただし、半列は整数列として同じものであれば異なる箇所から選んだものも同じものとする。
- 正の整数に対して、次の操作を行うことを考える：
1の位の数字を取り去り、それを4倍したものを加える。
たとえば、1234に操作を行うと $123 + 16 = 139$ となり、7に操作を行うと28となる。 25^{2015} から始めて操作を10000回行った後に得られる数はいくつか。
- 三角形 ABC の外接円を Γ とおく。 Γ の点 A を含まない方の弧 BC の中点を A' 、点 B を含まない方の弧 CA の中点を B' 、点 C を含まない方の弧 AB の中点を C' とおく。三角形 $AB'C'$ 、三角形 $A'B'C'$ 、三角形 $A''B''C''$ の面積がそれぞれ2, 3, 4のとき、三角形 ABC の面積を求めよ。
- いかなる正の整数 n に対しても次が成り立つような実数 a としてありうる最大の値を求めよ：
 $(n+1) \times (n+1)$ のマス目があり、各マスが白または黒のいずれか1色で塗られているとき、同じ塗り方の $\lceil an^2 \rceil$ 個の 2×2 のマス目を互いに重ならないように選ぶことができる。ただし、回転や裏返しにより重なりあう塗り方も異なるものとみなす。

なお、実数 r に対して r 以上の最小の整数を $\lceil r \rceil$ で表す。

¹Copyright ©2015 by Mathematical Olympiad Foundation of Japan.
著作権は数学オリンピック財団に帰属します。