# 2017年日本数学オリンピック予選

(公財) 数学オリンピック財団

## 問　題[1]

2017年1月9日 試験時間3時間12題 (答のみを記入する)

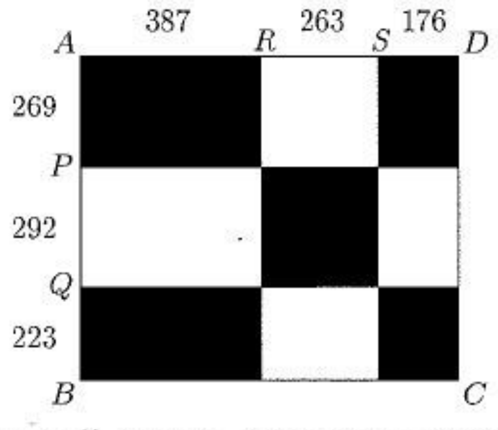
**1.** 四角形 $ABCD$ は $\angle A = \angle B = \angle C = 30^\circ$, $AB = 4$, $BC = 2\sqrt{3}$ をみたす．このとき四角形 $ABCD$ の面積を求めよ．ただし，$XY$ で線分 $XY$ の長さを表すものとする．

**2.** 正の整数の組 $(a, b)$ であって，$a < b$, $ab = 29!$ をみたし，かつ $a$ と $b$ が互いに素であるようなものはいくつあるか．

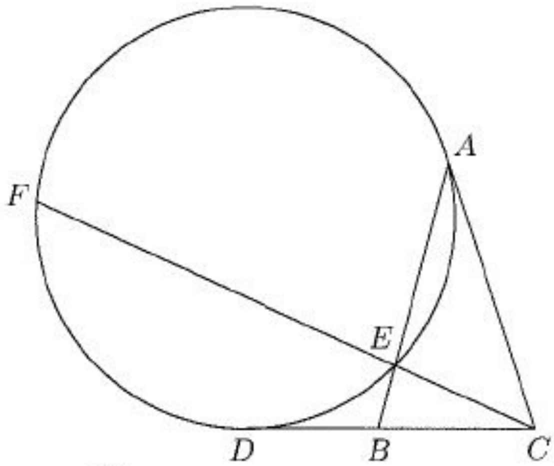
**3.** 図のように，長方形 $ABCD$ を辺に平行な4本の直線によって9個の領域に分割し，交互に黒と白で塗(ぬ)った．

$$AP = 269, \quad PQ = 292, \quad QB = 223, \qquad AR = 387, \quad RS = 263, \quad SD = 176$$

のとき，黒く塗られた部分の面積から白く塗られた部分の面積を引いた値を求めよ．
ただし，$XY$ で線分 $XY$ の長さを表すものとする．




**4.** 相異(あい)なる3点 $D, B, C$ は同一直線上にあり，$DB = BC = 2$ である．点 $A$ は $AB = AC$ をみたし，直線 $AC$ と直線 $DC$ にそれぞれ $A, D$ で接する円 $\Gamma$ が存在するとする．$\Gamma$ と直線 $AB$ の交点のうち $A$ でない方を $E$ とし，直線 $CE$ と $\Gamma$ の交点のうち $E$ でない方を $F$ とするとき，線分 $EF$ の長さを求めよ．ただし，$XY$ で線分 $XY$ の長さを表すものとする．




**5.** $a+b=c+d+e=29$ となる，相異(あい)なる正の整数の組 $(a,b,c,d,e)$ はいくつあるか．

**6.** 整数からなる数列 $x_1, x_2, \ldots$ を以下のように定めるとき，$x_{144}$ の値を求めよ．

- $x_1 = 1, \quad x_2 = x_3 = \cdots = x_{13} = 0.$
- $x_{n+13} = x_{n+5} + 2x_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$

**7.** $1, 2, \ldots, 1000$ の並べ替(か)え $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ が**よい並べ替え**であるとは，次をみたすこととする：

1000 以下の正の整数 $m$, $n$ に対し，$n$ が $m$ の倍数ならば，$a_n$ は $a_m$ の倍数である．

このとき，次の条件をみたす最小の正の整数 $k$ の値を求めよ．

条件：$b_k \neq k$ をみたすよい並べ替え $b_1, b_2, \ldots, b_{1000}$ が存在する．

**8.** 三角形 $ABC$ の辺 $BC$ 上に 2 点 $D$, $E$ がある．4 点 $B$, $D$, $E$, $C$ はこの順に並んでおり，$\angle BAD = \angle ACE$, $\angle ABD = \angle CAE$ であるとする．三角形 $ABE$ の外接円と三角形 $ADC$ の外接円の $A$ と異なる交点を $X$ とおき，$AX$ と $BC$ の交点を $F$ とする．$BF = 5, CF = 6, XD = 3$ のとき，線分 $XE$ の長さを求めよ．ただし，$PQ$ で線分 $PQ$ の長さを表すものとする．

**9.** $1, 2, \ldots, 2017$ の並べ替(か)え $\sigma = \bigl(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(2017)\bigr)$ について，$\sigma(i) = i$ となる $1 \leqq i \leqq 2017$ の個数を $F(\sigma)$ とする．すべての並べ替え $\sigma$ について $F(\sigma)^4$ を足し合わせた値を求めよ．

**10.** 三角形 $ABC$ は $\angle B = 90°$, $AB = 8$, $BC = 3$ をみたす．辺 $BC$ 上に点 $P$，辺 $CA$ 上に点 $Q$，辺 $AB$ 上に点 $R$ があり，$\angle CRP = \angle CRQ$, $\angle BPR = \angle CPQ$ をみたす．また，三角形 $PQR$ の周の長さは 12 である．このとき，$Q$ から辺 $BC$ におろした垂線の長さを求めよ．
ただし，$XY$ で線分 $XY$ の長さを表すものとする．

**11.** あるクラスには30人の生徒がいて，出席番号$1, 2, \ldots, 30$が割り当てられている．このクラスでいくつかの問題からなるテストを実施した．先生が採点をしたところ，$\{1, 2, \ldots, 30\}$の部分集合$S$に対する次の2つの命題が同値であることに気がついた．

(1) どの問題についても，ある$S$の元$k$があって，出席番号$k$の生徒が正答している．

(2) $S$は1以上30以下の2の倍数をすべて含む，または，1以上30以下の3の倍数をすべて含む，または，1以上30以下の5の倍数をすべて含む．

このとき，テストに出題された問題の数としてありうる最小の値を求めよ．

**12.** 上司と部下が次のようなゲームを行った際に，部下が最初にいるマスやその行動によらず，上司が勝つことができるような正の整数$X$のうち最小の値を$a_n$とする．

$n$を正の整数とし，$n \times n$のマス目のあるマスに部下がいる．上司と部下は以下の行動を交互に繰り返し，部下がこのマス目内で行動することができなくなった場合上司の勝ちである．

上司の行動：部下がいるマスを確認し，$X$個のマスを選ぶ．

部下の行動：上下左右に隣り合うマスに動くことを0回以上4回以下行うことで，上司が選んだ$X$個のマス以外のマスに移動する．

さて，$a_n = a_{2017}$をみたす最小の$n$の値を求めよ．

以上

# 第27回日本数学オリンピック予選

## 解答用紙

| 受験番号 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 氏名 | | | | | |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | 512 個 | 60000 |

| 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|
| 6 | 7392 個 | 2888 |

| 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|
| 59 | $\frac{3\sqrt{30}}{5}$ | $15 \cdot 2017!$ |

| 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|
| $\frac{9}{2}$ | 103 | 23 |

| 合計点 |
|---|
| |

| 受験番号 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|