

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

$$\vartheta(z,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\pi in^2}$$

$$-\frac{1}{99^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!}{n!^4}\frac{26390n+1103}{396^{4n}}$$

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m}$$

$$K=-(\sqrt{G})_{\rho\rho}/\sqrt{G}$$

$$V\cdot d\mathbf{l}=\int_{\Omega}rotV(x,y)dxdy$$

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = e^{in\theta}$$

$$\pi z \cot \pi z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - n^2}$$

$$T_n(z)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{2}{n})}$$

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{z/k}$$

$$f(\lambda)=\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\lambda^{n+1}+b_n\lambda^{n+2})$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=\begin{vmatrix}B_x&B_y&B_z\\C_x&C_y&C_z\end{vmatrix}$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_nn!}z^n$$

$$f_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),\frac{\partial u}{\partial y_1}(x,y)= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$f_{m,n}(x)=\frac{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$A^2-(trA_1)+(detA_1)E=O$$

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{Leg}(l)}{e^x-1}dx$$

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\xi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$$

$$\Lambda-2\pi=\mathit{Area}(P)$$

$$\pi(x)=x^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{x^{2m}}\Pi(x^{\frac{1}{m}})$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\frac{1}{a^2}\geq P(|\bar{X}-\mu|\leq a\sigma)$$

$$L(\overline{s},\overline{\chi})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

$$\zeta(s)=\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-p^{-s})^{-1}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}$$

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i\geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n\alpha_i}$$

MATH JOURNAL vol.6

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_nn!}z^n$$

$$f_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),\frac{\partial u}{\partial y_1}(x,y)= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$f_{m,n}(x)=\frac{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$A^2-(trA_1)+(detA_1)E=O$$

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

表紙について

有名な数式や定義式等を用いて本校神戸高等学校の副校章であるおおとりを作成しました。

お気に入りの数式を探してみましょう。

使用した数式は以下の通りです。(一般的な名称と異なる場合があります。また順番に意味はありません。)

・ディリクレ積分 ・半整数の階乗 ・テータ関数 ・ゼータ関数の偶数値 ・ラマヌジャンの円周率公式 ・グリーン公式 ・ドモアブルの定理 ・余接関数の部分分数分解 ・ストークスの定理 ・ガウス曲率 ・メルン変換とラプラス変換の関係式 ・オイラー定数 ・ χ^2 分布 ・ガンマ関数 ・フーリエ変換 ・外積 ・超幾何級数 ・t 分布 ・コーシーリーマンの関係式 ・スネデカーの **F** 分布 ・ケーリーハミルトンの定理 ・オイラーの公式 ・三角関数の極限 ・正規分布 ・テータ 3 重積 ・ゼータ関数のオイラー積 ・留数定理 ・ベクトルの内積外積 ・相加相乗平均 ・マクスウェル方程式 ・三平方の定理 ・ガウス積分 ・ガウスの発散定理 ・ゼータ関数 ・ディリクレ **L** 関数 ・チェビシエフの不等式 ・ローラン展開 ・ e^x のマクローリン展開 ・リーマンの明示公式 ・ガウスボンネの定理 ・完備化されたゼータ関数 ・平方剰余の相互法則 ・ゼータ関数の積分表示 ・ポアンカレ計量

まえがき

こんにちは。兵庫県立神戸高等学校数学研究会の部誌を手にとっていただき、ありがとうございます。数学研究会リーダーの岡野和子です。数学研究会が復活してから（部員不足のため、1993 に休部）5 年半が経過したそうです。

本誌は神戸高校の現 3 年生と 2 年生である、77 回生と 78 回生が作成したものです。部員がおもしろいと感じた研究やオリジナル問題をたくさん掲載しています。この部誌を開いたあなたに、存分に楽しんでいただけると嬉しいです。

目次

表紙について.....	1
まえがき.....	2
	3 年 9 組 岡野和子
素数について.....	4
	3 年 9 組 神崎亮志
$3n+1$ 問題.....	7
	3 年 9 組 宮下透
位取り記数法で最も効率の良い基数は何か.....	11
	3 年 9 組 古川仁翔
様々な実験から円周率を求める.....	13
	3 年 9 組 平松拓海
三平方の定理と循環論法.....	17
	3 年 6 組 内田龍之介
フランク・モーリーの三角形についての考察.....	20
	3 年 9 組 番場大誠 柳澤昭宏 吉岡稜太郎
シグマ公式に隠された法則.....	24
	3 年 9 組 前場雄晴
等比数列で漸化式を解く.....	28
	3 年 9 組 岡野和子
他分野における微分方程式の活用.....	30
	3 年 8 組 西崎俊介
オリジナル問題～算数編～.....	35
オリジナル問題～算数編～解答解説.....	39
	2 年生
オリジナル問題～中学数学編～.....	47
オリジナル問題～中学数学編～解答解説.....	50
	2 年生
オリジナル問題～高校数学編～.....	59
オリジナル問題～高校数学編～解答解説.....	67
	2 年生
おわりに.....	77
	3 年 9 組 岡野和子
数学会紹介.....	78

素数について

神崎 亮志

1. はじめに

みなさん素数とは何か知っていますか？素数とは、1 とその数自身とその外には約数がない 2 以上の正の整数と定義される数のことです。例えば 10 以下の素数は、2、3、5、7 があります。

2. 素数の歴史

オイラー



ガウス



リーマン



2.1 オイラーの功績

オイラーは、18 世紀の数学者であり、素数は $n^2 + n + 41$ であると考えました。しかし、その後 $n=1 \sim 40$ までは成り立つが $n=41$ では成り立たないことが分かったためこの方程式は否定されました。

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{5^2}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{7^2}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{11^2}} \dots$$

上記の式はオイラーが発見した素数の式であり分母の 2 乗部分に小さいものか

ら順に素数を代入していったものを掛け合わせると $\pi^2/6$ となることを示しています。ここで興味深いのが、なんの規則性もないとそれまで思われていた素数の掛け算が数学のなかでもっとも美しい図形と思われている円と深い関わりを持っているということが分かったことです。

2.2 ガウスの功績

ガウスは、19 世紀の数学者であり、以下のような式を考えました。

$$\frac{x}{\log_e x}$$

この式の x に自然数を代入するとその数までにある素数の個数がある程度の精度でわかることが知られています。また代入する数を大きくすればするほどその精度が高くなることも知られています。この定理を素数定理と言います。

2.3 リーマンの功績

リーマンは、19 世紀の数学者であり、素数の分布を正確に求めることに成功しました。それが以下の式です。

$$\pi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \left(\text{Li}\left(x^{\frac{1}{m}}\right) - \sum_{\rho} \text{Li}\left(x^{\frac{\rho}{m}}\right) + \int_{x^{\frac{1}{m}}}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 - 1)t \log t} - \log 2 \right)$$

しかし、上記の式の□□で囲まれた部分がまだよく分かっていないことがあり、厳密にいうと正確に計算できるとはいえない状態です。ここであの有名なリーマン予想が証明されれば□□の部分明確になるため素数の分布を厳密に知ることができるようになります。リーマン予想とは「ゼータ関数の非自明な零点は全て実部が 1/2 上にある」というものです。

3. 素数と生活

素数は私たちの生活と密接に関わっています。例えば、素数はインターネット

トなどで買い物をするときにクレジットカードや住所を暗号化し第三者に知られないようにしてくれています。これは素因数分解の性質を応用したものであり、その性質とは、素数の掛け算は簡単だが逆に掛け算したものを素数の掛け算になおす素因数分解には非常に時間がかかるというものです。例をあげると600 桁の数を素因数分解するにはスーパーコンピュータを用いても 1 万年以上かかると言われています。

4. 最後に

今回は、既知の事実について述べさせていただきましたが、これをきっかけに素数や数学について少しでも興味を持っていただけると幸いです。

3n+1 問題 (俗称 4→2→1 ループ)

宮下 透

数学好きの皆さんなら一度は耳にしたことがあるであろうコラッツ予想。それは以下の主張である

任意の正の整数 n に対して、以下で定められる操作について考える。

n が偶数の場合： n を 2 で割る

n が奇数の場合： n に 3 をかけて 1 を足す

このとき

「初期値 n に関わらず、有限回の操作のうちに必ず 1 に到達する = 操作結果が 4→2→1 というループに入る」

この操作を式で表すと

$$n/2 \ (x \equiv 0 \pmod{2}) \text{ or } 3n+1 \ (x \equiv 1 \pmod{2})$$

今回は先行研究で $3n+1$ に対する 2 を法とした余剰による分類と 4→2→1 ループから奇数を表す (逆写像と言う) アプローチから表された数を考察し、初期値 n を全て表そうと試みた。

変換前の奇数を p 、変換後の奇数を q 、割り切れる最大の 2 のべき乗を 2 とすれば、 $p \rightarrow q$ は以下のように表現できる。

$$q = (3p+1)/2^m : \textcircled{1}$$

$p \rightarrow q$ は、以下の性質を持つ

・ p が奇数であるため $3p+1$ は必ず無数となり、少なくとも一回 2 で割れる。したがって、 m は 1 以上の整数である。

・ 操作結果 q が p と等しくなるのは $p=1$ の場合のみである。

$q=p$ となる奇数を x とおき、 $\textcircled{1}$ 式に代入すると

$$x = (3x + 1)/2^m$$

これを x で解くと

$$x = 1/(2^m - 3)$$

とが正の奇数（整数）であるという条件を満たす m は 2 のみである。

$m = 2$ を代入すると x は 1 となる。すなわち $p=1$ の場合のみ $q=p$ となる。

また、任意の奇数 p が与えられた際、3 倍して 1 足した時点で、その値を割ることができる最大の 2^m が存在する。つまり指数部分と n との関係に注目すれば、初期値全てを表せるのではないかと考えた。この時の n と m の関係について分析する。 g を偶数、 k を奇数、 n を 0 以上の整数とし、奇数 y を次の式で表現してみる。

$$y = g \cdot n + k : \textcircled{2}$$

係数の値が大きいほど表現できる奇数 y は少なくなり、初期値 k の値が大きいほど前半の奇数が排除される。奇数表現 $2n+1$ は、 g, k それぞれの最小値を表しており、これですべての奇数を表している。この②式の奇数表現を利用して、 $p \rightarrow q$ で扱われる奇数の条件を満たす最小の g, k 値を求めることで、 $p \rightarrow q$ を定式化する。

②式で p が与えられているとし、①式の p に②式の右辺を代入し、 n に対して整理する。

$$q = (3p + 1)/2^m$$

$$= (3(g \cdot n + k) + 1)/2^m$$

$$= (3g/2^m)n + (3k + 1)/2^m$$

ここで、 q も奇数であることから再び②式を適用すると、 g, k の条件から右辺第一項の n の係数は数であり、右辺第二項は奇数でなければならない。

$$3g/2^m \equiv \text{偶数} : \textcircled{3}$$

$$(3k + 1)/2^m \equiv \text{奇数} : \textcircled{4}$$

このそれぞれの式から、 g, k の最小値を求める。まず③式 g の最小値を求める。 q は奇数（すなわち整数）であるため、分子である $3g$ は 2^m の因数を持つ必要がある。この条件を満たす最小の g 値は、 2^{m+1} そのものである。すなわち、

$$g = 2^{m+1}$$

次に、④式 k の最小値を求める。 q は奇数（すなわち整数）であるため、分子である $3k+1$ は 2^m の因数を持つ奇数でなければならない。 r を任意の奇数とすると、以下が成り立つ。

$$3k+1=r(2^m)$$

これを k で解くと、

$$k=((2^m)-1)/3$$

つまり、 k の最小値を求めることは、奇数 r の最小値を求めることである。ここで、以下の定理を準備する。

定理： m を偶数とすれば、メルセンヌ数 $(2^m)-1$ は 3 の倍数であり、3 で割ると奇数となる。

$r=5$ の場合奇数 m で k が奇数であるので、

$$k=(2^m-1)/3(m=0 \pmod{2}) \text{ or } (5(2^m)-1)/3(m=1 \pmod{2}) : ⑤$$

⑤の結果を②式に代入してまとめると、奇数 p は以下のように表現できる。

$$p=n(2^{(m+1)})+(2^m-1)/3(m=0 \pmod{2})$$

$$n(2^{(m+1)})+(5(2^m)-1)/3(m=1 \pmod{2}) : ⑥$$

さらに、⑥式を①式に代入すると、2 で割った結果の q を求めることができる。

$$q=6n+1(m=0 \pmod{2}) \text{ or } 6n+3 \text{ or } 6n+5(m=1 \pmod{2})$$

以上より次のことが考察される

奇数 q を 6 で割った余り、1,3,5 を t とする

- ・ p は一つの m を持ち、 q は複数の m を持つ
- ・ $t=1(m \text{ 偶数})$ $t=5(m \text{ 奇数})$ は n を固定すると等差数列になる
- ・ $t=3$ は存在しない
- ・ $m=1$ のとき $p \rightarrow q$ で値が増加する

また $q \rightarrow p$ つまり逆を証明することで初期値を全て表すことも考えられ、この操作は一つの q から複数の p を求めることが可能である。先行研究によって $3n+3^p$ 操作の逆演算とコラッツ予想が等しいことや 2^{6t} から $(64^t)-1$ が 9 の倍数であることが証明されているが、

全ての初期値を具体的に求めたり、規則性を見つけることが困難と考えた。今回は余剰と指数部分に注目して初期値から $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ループに帰着することを試みたが、全ての操作途中で発生するループを否定することができず、また 1 に帰着することは言えない結果になった。実は、この命題は松本 真氏の「二進数による分類、階差数列の一般項とグラフ理論を使った、コラッツ予想は正であるという証明」が真偽は定かではないが、発表されている。全て英語で記述されているが興味のある人はぜひ見て吟味して欲しい。

参考文献

「二進法による分類、階差数列の一般項とグラフ理論を使った、コラッツ予想は正であるという証明」 松本 真 北野病院

<https://jxiv.jst.go.jp/index.php/jxiv/preprint/view/69>

https://nazesuugaku.com/collatzconjecture_proof/

「コラッツ予想と同値な命題の発見について」 大阪府立富田林高等学校

https://tonko.ed.jp/cms/wp-content/themes/tonko/download/08/%E5%B9%B3%E6%88%9030%E5%B9%B4%E5%BA%A6%E5%A4%A7%E9%98%AA%E3%82%B5%E3%82%A4%E3%82%A8%E3%83%B3%E3%82%B9%E3%83%87%E3%82%A4_%E3%82%B3%E3%83%A9%E3%83%83%E3%83%84%E4%BA%88%E6%83%B3_%E8%A6%81%E6%97%A8.pdf

「コラッツ予想に関連するいくつかの関数について」 隅山 孝夫 愛知工業大学

<http://hdl.handle.net/11133/2869>

http://sitmathclub.web.fc2.com/seisaku/shibasai2015/paper/kubota_p.pdf

<https://qiita.com/outlandkarasu@github/items/35205552a47383835df6>

<https://ja.m.wikipedia.org/wiki/コラッツの問題>

テレンス・タオによる偏微分を用いたコラッツ予想へのアプローチ（数学者によるアプローチの紹介）

<https://arxiv.org/abs/1909.03562>

<https://terrytao.files.wordpress.com/2020/02/collatz.pdf>

位取り記数法で最も効率の良い基数は何か

古川仁翔

1. はじめに

我々人類は日常生活で当たり前のように 10 進数を用いて数を表している。一方で古代文明では 60 進法や 12 進法なども使われていた。他にも、時間や角度に 60 進法が使われていたり、2 進法が基になってコンピューターが作られたり、自然界においては DNA の塩基が 4 種類あることからそこに 4 進法が使われていると捉えることもできる。

このように様々な基数による位取り記数法で数や情報を表すことができるが、果たしてどんな数が基数であるときに最も効率よく数を表すことができるのだろうか。ここではある仮定の下での位取り記数法の効率を考える。

2. 定義・仮定

“743” のように、いくつかの数字を並べて数を表す方法を「位取り記数法」という。そして、N 種類の数字の組み合わせによる位取り記数法を「N 進法」などといい、数 N を「基数」などという。ここでは N が自然数の場合のみを扱う。(N が負の数や虚数のものもあるのでぜひ調べてみてほしい。)

基数を n とし、 n 進法で表された自然数の桁数を m とする。(n, m は自然数)

n 進法で m 桁の数を表した時、表される数の種類を R とすると、次の式 (1) が成り立つ。

$$R = n^m \quad \dots (1)$$

次に、 n 進法で m 桁の数を表すときにかかるコストを C とする。

桁数 m が一定の時コスト C は基数 n に比例し、基数 n が一定の時コスト C は桁数 m に比例すると仮定する。そして比例定数 a (>0) を用いると次の式 (2) が成り立つ。

$$C = anm \quad \dots (2)$$

3. 考察

方針 R が一定の時のコスト C が最小となる n を求める。

(1) 式より、次の式 (3) が成り立つ

$$m = \frac{\log R}{\log n} \quad \dots (3)$$

(3) 式を (2) 式に代入すると (4) 式が成り立つ。

$$C = a \log R \cdot \frac{n}{\log n} \quad \dots (4)$$

$a \log R$ は定数だから $\frac{n}{\log n}$ が最小となれば C は最小となる。

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{n}{\log n} \right) = \frac{\log n - 1}{(\log n)^2}$$

より、 $n = e$ の時、極小値となる。

n は自然数であるから、 e に近い自然数 2 と 3 の時を考える。

$n=2$ の時、 $\frac{2}{\log 2} = 6.64 \dots$

$n=3$ の時、 $\frac{3}{\log 3} = 6.28 \dots$

であるから、 $n=3$ の時 C は最小となる。

4. 結論

ここでの仮定の下では基数が 3 の時に最もコストを抑えられる、つまり効率が良いと言えることがわかった。しかしその仮定は直感的なものであり、厳密性に欠ける。よって別の仮定の下では今回得られた結論とは異なる結論が得られる可能性がある。これを読んだあなたにも仮定をより正確に考え、効率的な基数を見つけてみてほしい。

様々な実験から円周率を求める

平松 拓海

1.はじめに

みなさんご存知の円周率は、円の周長の直径に対する比率として定義される数学定数であり、 $\pi = 3.1415926535\dots$ と循環することなく永遠に続く無理数である。a このように私たちはただ定義された円周率を教わるが、どのような過程で π が求まるのかはあまり知られていない。今回は円周率を求める興味深い身の回りの実験をいくつか吟味する。

2.数学的に円周率を求める

(i) ライブニッツの式

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

この式は円周率の値を求めるための公式の一つであり、以下の級数で表される。

これは初項が 1 で各項が奇数の逆数である交項級数が $\pi / 4 (= 0.785398\dots)$ に収束することを意味する。総和の記号を用いると以下ようになる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

(ii) バーゼル問題の解

級数の問題の一つで、平方数の逆数全ての和を求める問題である。

平方数の逆数和の式である

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

からゼータ関数の式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

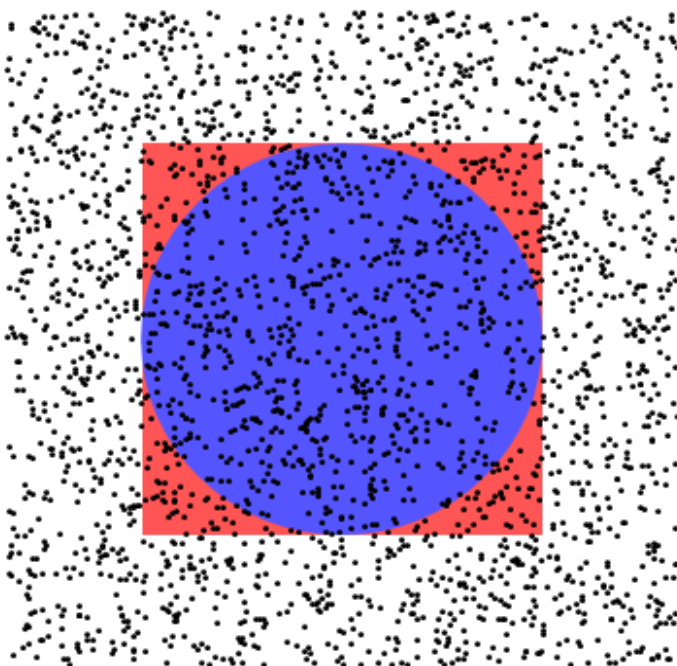
を求め、 $s=2$ における値から円周率を出す方法である。

3.身の回りの実験から円周率を求める

(i) ダーツ

大きな紙を持ってきて、そこに何度もダーツをし、ダーツの先端があたった点を全て記録する。十分な点が記録された後、紙の一部に円を書き、その円を内接する正方形を描く。そして、正方形内にある点の数 N と円内にある点の数 M を数える。もし、ダーツがあたった点の位置が十分ランダムであればとは正方形と円の面積に比例するはずであるので、円周率は

$$\pi = \frac{4M}{N}$$



と表せる。

←赤い正方形内の点の数と青円の中の点の数を数えることで円周率を導く。

(ii) コインを投げる

表と裏が出る確率が同一のコインを m 回投げて、表が出た回数 k を記録する。この作業を n 回繰り返して、表が出た回数 k の確率分布 $P(X=k)$ を求める。ここで、 m が十分大き

い時、 P は正規分布

$$P(X = k) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \exp \left[-\frac{(k - m/2)^2}{m/2} \right]$$

として近似できる。 よって、実験的に求めた確率分布に対して、 π をパラメータとして上式から円周率を求める事ができる。

(iii) 床に針を落とす

長さ L の針を用意し、また床に間隔 L で多数の平行線を引く。その床に針を投げ続け、針が平行線と交わる確率 p を評価する。 $p = 2/\pi$ と表される事が知られている。よって

$$\pi = \frac{2}{p}$$

から円周率を求められる。この関係式はビュフォンの針という非常に有名な問題から導かれる。また針の代わりにリングや多角形が使用されるビュフォンの麺と呼ばれる方法でも同様にして円周率は求められる。

(iv) 振り子の周期を測る

長さ L の振り子を重力場中で振動させ、その周期 T を測る。振り子の振動角が十分小さく、空気抵抗などの摩擦が存在しないと仮定するとは、周期 T はと表される。ここで g は重力加速度より円周率 π は

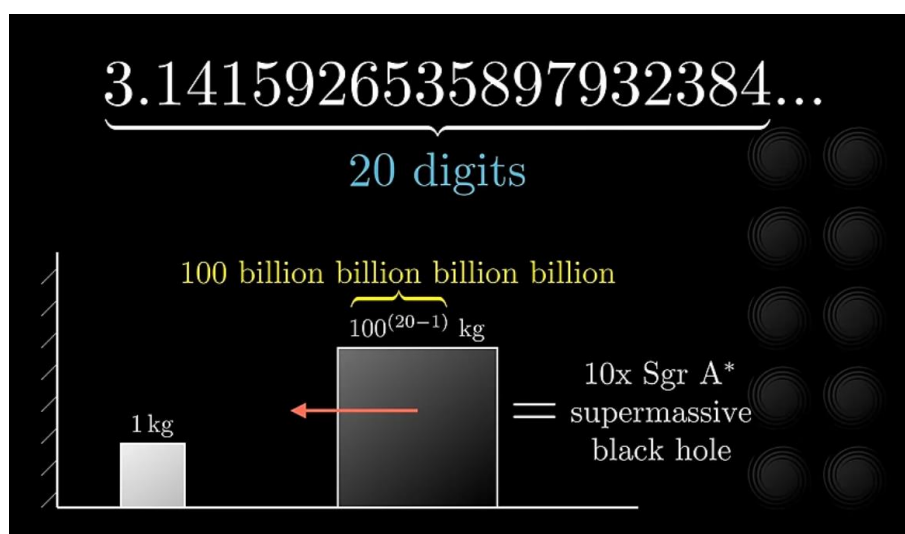
の式から求めることができる。ただこの値は重力加速度 g の値に大きく依存しており、実際に高い精度で円周率を求めることは難しい。

$$\pi = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

(v)弾性衝突の回数を数える

壁・軽い物体・重い物体を左から順に並べ、壁と軽い物体が静止した状態で、重い物体を左からぶつける。

ここで、物体と床の間の摩擦はなく、2つの物体間及び物体と壁間は完全弾性衝突を起こすとする。このとき、2つの物体間と物体・壁の間の衝突回数を数えると円周率の値となる。ただ地球上では実現不可能な理想的な実験のため、数値計算を使用せざるを得



ないが、非常に興味深い導き方と言えるだろう。

4.最後に

今回は既知の事実を述べましたが、この論文を通して身近な物事と数学との繋がりを知っていただけたとうれしいです。ぜひ興味深いと思った実験方法については詳しく調べてみてください。

三平方の定理と循環論法

内田龍之介

1. はじめに

あなたは循環論法をご存知だろうか。循環論法とは、ある命題を証明するために、その命題が真であることを前提とする命題を根拠とすることである。この場合、その命題が証明されたと言うことは当然できない。 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ といった三角比に関する公式には、三平方の定理を前提としたものが数多く存在する。このことから、三平方の定理が発見されてから2000年以上の間、三角比を用いた三平方の定理の厳密な証明は不可能とも考えられていた。ところが、2023年、ルシア・ジョンソン氏とネキヤ・ジャクソン氏は三角比を用いる三平方の定理の証明方法をアメリカ数学会で発表した。これからその方法を紹介する。

前提知識

(証明に関する説明は割愛する)

- (1) 正弦定理：三角形ABCについて、角Aの大きさを a 、角Bの大きさを b 、角Cの大きさを c としたとき、

$$\frac{BC}{\sin a} = \frac{CA}{\sin b} = \frac{AB}{\sin c}$$

- (2) 無限等比級数の和：初項 k 、公比 r の無限等比級数の和は、 $-1 < r < 1$ のとき、

$$k + kr + kr^2 + \dots = \frac{k}{1-r}$$

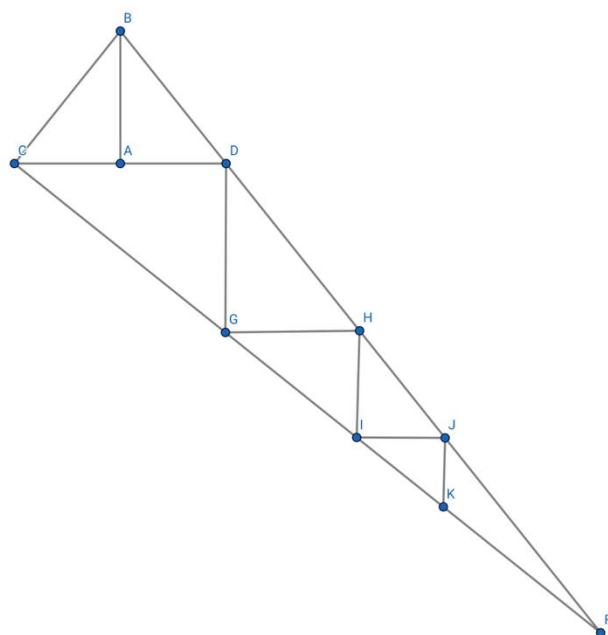
2. 三平方の定理の新しい証明

角Aを直角とし、 $AB \neq AC$ の直角三角形ABCにつ

いて考える。このとき $AB > AC$ としても一般性を

失わない。また、 $BC = a$ 、 $AC = b$ 、 $AB = c$ 、角Bの大きさを p 、角Cの大きさを q とする。

- ① 直線ABを対称の軸として点Cを対称移動させた点をDとする。
- ② 線分CDの下側に三角形ABCと相似になるように三角形DCGを作図する。
- ③ 線分DGの右側に三角形ABCと相似になるように三角形GDHを作図する。
- ④ 図1のように②と③を繰り返す、二直線CG、DHの交点をFとする。



(図1)

$$\sin p = \cos q = \frac{b}{a} \dots (1)$$

$$\sin q = \cos p = \frac{c}{a} \dots (2)$$

が成り立つことから、三角形DCGの各辺の長さを

求める。

$$\cos p = \frac{CD}{CG} = \frac{2b}{CG}$$

$$CG = \frac{2ab}{c} \dots (3)$$

$$\sin p = \frac{DG}{CG} = \frac{b}{a}$$

$$DG = \frac{2b^2}{c}$$

次に三角形GDHの各辺の長さを求める。(1)、(2)より

$$\frac{c}{a} = \frac{DG}{DH}$$

$$DH = \frac{2ab^2}{c^2} \dots (4)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{GH}{DH}$$

$$GH = \frac{2b^3}{c^2}$$

加えて三角形HIGの各辺の長さを求める。(1)、(2)より

$$\frac{c}{a} = \frac{GH}{GI}$$

$$GI = \frac{2ab^3}{c^3} \dots (5)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{HI}{GI}$$

$$HI = \frac{2b^4}{c^3}$$

従って、三角形IHJにおいて(2)より

$$\frac{c}{a} = \frac{HI}{HJ}$$

$$HJ = \frac{2ab^4}{c^4} \dots (6)$$

ここで三角形BCFについて考えると、

$$\sin 2p = \frac{CF}{BF} \dots (7)$$

三角形BCDで正弦定理を用いると、(2)より、

$$\frac{a}{\sin q} = \frac{2b}{\sin 2p}$$

$$\sin 2p = \frac{2bc}{a^2} \dots (8)$$

(3)、(5)より、線分CFの長さは初項 $\frac{2ab}{c}$ 、公比 $\frac{b^2}{c^2}$ の無限等比級数の和である。

$b < c$ より $\frac{b^2}{c^2} < 1$ であるから、

$$CF = \frac{\frac{2ab}{c}}{1 - \frac{b^2}{c^2}}$$

$$= \frac{2ab}{c - \frac{b^2}{c}}$$

$$= \frac{2abc}{c^2 - b^2} \dots (9)$$

同様にして、線分BFの長さは、 $BD = a$ と(4)と(6)より、

$$BF = a + \frac{2b^2}{c^2}a + \frac{2b^4}{c^4}a + \dots$$

$$= a + \frac{\frac{2b^2}{c^2}a}{1 - \frac{b^2}{c^2}}$$

$$= \frac{c^2a - b^2a}{c^2 - b^2} + \frac{2b^2a}{c^2 - b^2}$$

$$= \frac{a(b^2 + c^2)}{c^2 - b^2} \dots (10)$$

(8)~(10)を(7)に代入して、

$$\frac{2bc}{a^2} = \frac{\frac{2abc}{c^2 - b^2}}{\frac{a(b^2 + c^2)}{c^2 - b^2}}$$

$$\frac{2bc}{a^2} = \frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

よって三平方の定理が示された。

3. 終わりに

2000年を超える歴史がある三平方の定理で
さえも、今なお新しい発見と探求が続いている。
そんな数学の奥深さを少しでも感じてもらえた
なら幸いだ。

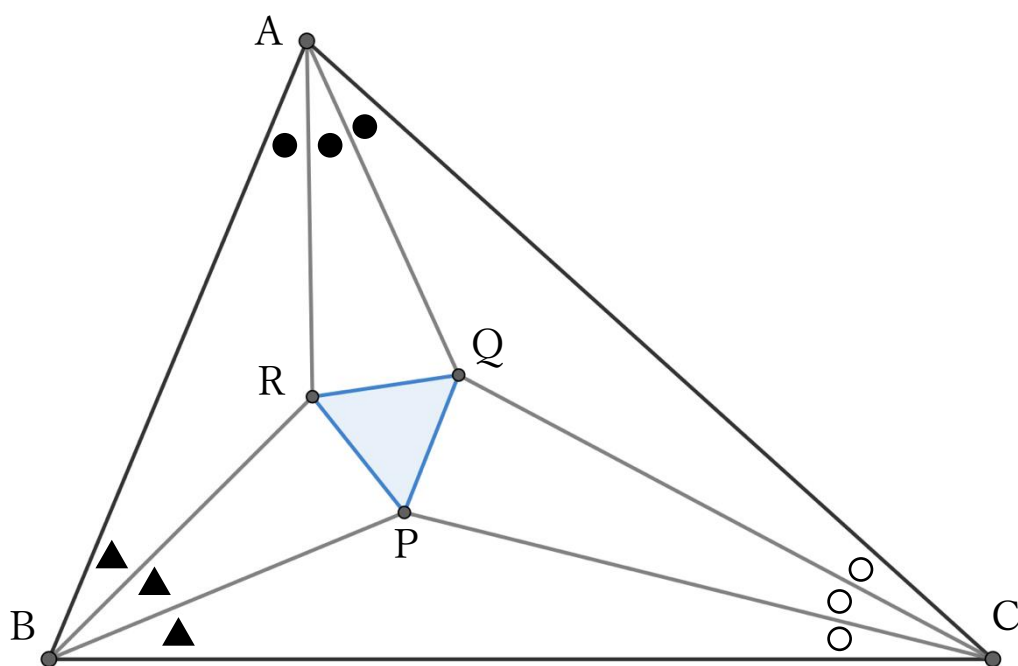
フランク・モーリーの三角形についての考察

数学研究会 3年 番場大誠 柳澤昭宏 吉岡稜太郎

1. はじめに

あなたは初等幾何学の中で、最も美しいと言われる定理をご存知だろうか。それは、1899年にアメリカの数学者フランク・モーリーによって証明された、モーリーの定理である。モーリーの定理の概要は、以下の通りである。

【モーリーの定理】



任意の三角形 ABC において、3つの角の三等分線どうしが最初にぶつかる点を P, Q, R とおくと、三角形 PQR は正三角形である。

主張が単純で、とても美しい定理ではないだろうか。ユークリッドの時代に発見されてもおかしくないような定理なのに、発見されたのはつい最近なのも驚きである。

このとき、三角形 PQR は三角形 ABC に依存して1つに定まる。本研究では、三角形 PQR の1辺の長さや面積を、三角形 ABC の情報で表すことを研究目的とする。本題に入る前にまずは、モーリーの定理の証明を紹介しないわけにはいかない。証明方法はいろいろあるが、今回はその中でも三角関数を利用する証明方法を紹介する。

2. 導入

I. 補題の証明

早速定理の証明に入っていくが、まずはその際に用いる補題について証明する。

補題

次が成り立つ。 $\sin 3\theta = 4\sin\theta \sin \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$...①

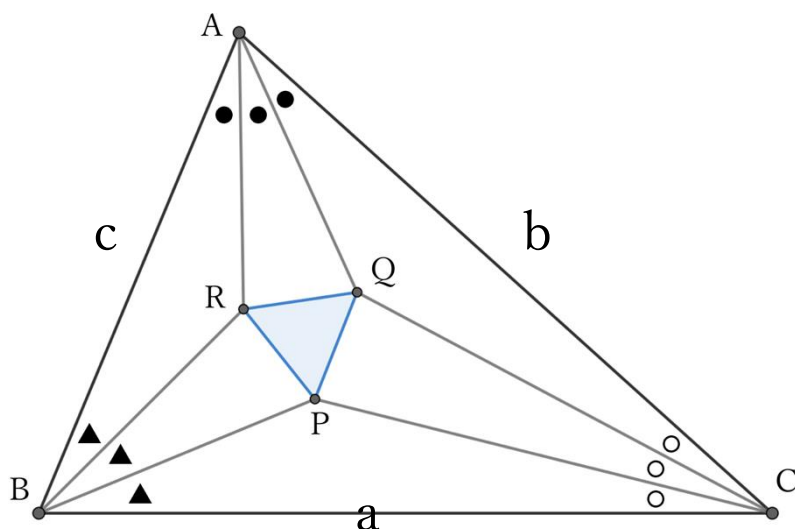
証明

通常の $\sin$ の 3 倍角の公式を変形して導く。

$$\begin{aligned}
 \sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\theta \\
 &= 4\sin\theta \left(\frac{3}{4} - \theta\right) \\
 &= 4\sin\theta \left\{\frac{3}{4}(1 - \theta) - \frac{1}{4}\theta\right\} \\
 &= 4\sin\theta \left(\frac{3}{4}\theta - \frac{1}{4}\theta\right) \\
 &= 4\sin\theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right) \\
 &= 4\sin\theta \sin \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)
 \end{aligned}$$

以上より、示せた。

II. モーリーの定理の証明



証明

上のように各辺の長さを a, b, c と定める。

$\triangle ARB$ について正弦定理より

$$\begin{aligned}
 \frac{AR}{\sin \frac{B}{3}} &= \frac{c}{\sin \sin \left(\pi - \frac{A}{3} - \frac{B}{3}\right)} \\
 AR &= \frac{c \sin \frac{B}{3}}{\left(\pi - \frac{A}{3} - \frac{B}{3}\right)} = \frac{c \sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{A+B}{3}} = \frac{c \sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{\pi - C}{3}} \quad \dots ②
 \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ について、外接円の半径を r として正弦定理より

$$c = 2r \sin C$$

②に代入して、

$$AR = 2r \sin C \frac{\sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{\pi-C}{3}} \cdots \textcircled{3}$$

ここで、①の θ を $\frac{C}{3}$ とすると

$$\sin C = 4 \sin \sin \frac{C}{3} \sin \sin \frac{\pi-C}{3} \sin \sin \frac{\pi+C}{3}$$

③に代入して、

$$AR = 8r \sin \sin \frac{B}{3} \sin \sin \frac{C}{3} \cdots (*)$$

同様に、

$$AQ = 8r \sin \sin \frac{B}{3} \sin \sin \frac{C}{3} \sin \sin \frac{\pi+B}{3}$$

以上の2式より、

$$\frac{AQ}{\sin \frac{\pi+B}{3}} = \frac{AR}{\sin \frac{\pi+C}{3}} \cdots \textcircled{4}$$

また、 $\triangle ARQ$ について正弦定理より

$$\frac{AQ}{\sin \angle ARQ} = \frac{AR}{\sin \angle AQR} \cdots \textcircled{5}$$

④、⑤を比較して

$$\cdot \sin \angle ARQ = \sin \sin \frac{\pi+B}{3}$$

$$\cdot \sin \angle AQR = \sin \sin \frac{\pi+C}{3}$$

$$\angle ARQ + \angle AQR = \pi - \frac{A}{3} = \pi - \frac{\pi-B-C}{3} = \frac{2}{3}\pi + \frac{B}{3} + \frac{C}{3}$$

と合わせて、

$$\cdot \angle ARQ = \frac{\pi+B}{3}$$

$$\cdot \angle AQR = \frac{\pi+C}{3}$$

同様にして、

$$\angle CQP = \frac{\pi+A}{3}$$

$$\angle PQR = 2\pi - \angle AQR - \angle CQP - \angle AQC$$

$$= 2\pi - \frac{\pi+C}{3} - \frac{\pi+A}{3} - \left(\pi - \frac{A}{3} - \frac{B}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

$$\text{同様にして、} \angle QRP = \angle RPQ = \frac{\pi}{3}$$

したがって、 $\triangle PQR$ は正三角形であることが示された。

3. 考察

まずはじめに、三角形 PQR の長さを、三角形 ABC の情報を用いて表すことを考える。

証明の中の(*)より

$$AR = 8r \sin \sin \frac{B}{3} \sin \sin \frac{C}{3}$$

$\triangle PQR$ の一辺の長さを x とおくと、 $\triangle ARQ$ について正弦定理より

$$\frac{8r \sin \frac{B}{3} \sin \frac{C}{3} \sin \frac{\pi + C}{3}}{\sin \frac{\pi + C}{3}} = \frac{x}{\sin \frac{A}{3}}$$

$$\therefore x = 8r$$

また、導入より△PQR は正三角形であり、1 辺の長さが $x = 8r$ であるから

△PQR の面積は $s = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = 16$ となる。

そして△ABC と△PQR の面積の比を R とおくと、 $R = \frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$

△ABC の面積を S とおくと、 $S = \frac{1}{2} ab \sin C$

ここで、△ABC において正弦定理を用いて $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$ より

$$a = 2R \sin A, b = 2R \sin B$$

これらを S に代入して

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \text{ となる。}$$

$\therefore r = \frac{s}{S} = 8\sqrt{3}$ となる。

我々は、R が最大値を取る時、つまり△PQR が占める面積の割合が△ABC の中で最も大きくなる時の A,B,C の値を求めようと試みたが、残念なことに結果には至らなかった。読者の皆さんには、是非ともチャレンジしてみしてほしい。

シグマ公式に隠された法則

前場雄晴

数学Bでシグマというものを習います。以下のように用いられます。

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_k = k^m (0 \leq m \leq 3)$$

のとき、高校の授業で習う公式があります。以下に示します。

$$\sum_{k=1}^n k^0 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 = n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^n k^1 = 1 + 2 + 3 + \cdots (n-1) + n$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

ざっと証明していきます。

[証明]

①は明らかなので省略

②

$$\sum_{k=1}^n k^1 = 1 + 2 + 3 + \cdots (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^n k^1 = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$$

辺々足して

$$2 \sum_{k=1}^n k^1 = (1+n)n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k^1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

③

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

$$\sum_{k=1}^n \{(k+1)^3 - k^3\} = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$$

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$3 \sum_{k=1}^n k \text{ と } \sum_{k=1}^n 1 \text{ は既知であり、}$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

④

③と同様にして

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 \quad Q.E.D.$$

③の証明から $\sum_{k=1}^n k^m$ 公式は $\sum_{k=1}^n k^{m-1}$ 公式

までが導出されていれば導けることが分かりますね。

でも、いちいち計算するのは大変です。何か法則はないのでしょうか？

まず、それぞれの公式を展開してみます。

$$\sum_{k=1}^n k^0 = n$$

$$\sum_{k=1}^n k^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

まだ法則があるようには見られません。

ここで突然に、それぞれの項を $m+1$ 倍してみます。

$$\sum_{k=1}^n k^0 = n$$

$$2 \sum_{k=1}^n k^1 = n^2 + n$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = n^4 + 2n^3 + n^2$$

まだ分かりませんね。またここで突然ですが、各項を m に関連した二項係数を用いて表します。

$$\sum_{k=1}^n k^0 = {}_1C_0 n$$

$$2 \sum_{k=1}^n k^1 = {}_2C_0 n^2 + {}_2C_1 \frac{1}{2}n$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = {}_3C_0 n^3 + {}_3C_1 \frac{1}{2}n^2 + {}_3C_2 \frac{1}{6}n$$

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = {}_4C_0 n^4 + {}_4C_1 \frac{1}{2}n^3 + {}_4C_2 \frac{1}{6}n^2 + {}_4C_3 0n$$

これでやっと法則っぽいものがみられましたね。係数がどれも同じだということが分かります。

これを一般式で表すと次のようになります。

$$(m+1) \sum_{k=1}^n k^m = \sum_{j=1}^m {}_{m+1}C_j B_j n^{m+1-j}$$

ただし係数 B_j は

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} x^j \text{ を満たします。}$$

これをファウルハーバーの公式といい、すでに証明されています。(証明は割愛)

また、 B_j は漸化式を用いて、

$$B_0 = 1, B_j = -\frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j-1} (j+1) C_k B_k$$

とも表すことができ、これだと簡単に B_j を導くことができます。

これを用いてシグマ公式を導くのに計算は必要ですが、法則を見いだせるとすごくすっきりしますね。

ちなみに今回の式に現れた係数 B_j はベルヌーイ数と呼ばれる数列で、リーマンゼータ関数等、様々なところに現れる数列です。ぜひ覚えておいてください。

今回の論文では、僕が発見したことや導いたことではなく、すでに知られていることを引用させていただきました。新しいことはありませんが、身近なところにも隠された法則があることを知ってほしいです。最後まで読んでくださりありがとうございました！

等比数列で漸化式を解く

岡野和子

私たちが高校で学習しただけでも漸化式を解く方法は様々ある．その一つが，等比数列 $\{a_n + Q(n)\}$ を作ることによって漸化式を解くことができる，というものである．ここでは

$a_{n+1} = pa_n + kn + l$
と表せる漸化式について考えてみたい．

まず

$a_{n+1} = pa_n + kn + l$ ($p \neq 0, k \neq 0$) ①
が成り立つ時の a_n を，等比数列を利用して求める．

この時 $Q(n) = \alpha n + \beta$ とし，①を

$a_{n+1} + Q(n+1) = p\{a_n + Q(n)\}$ ，
つまり

$a_{n+1} + \{\alpha(n+1) + \beta\} = p\{a_n + (\alpha n + \beta)\}$ ②

と変形できる α, β を定める．②は

$a_{n+1} = pa_n + \alpha(p-1)n + \beta(p-1) - \alpha$
と表せる．これと①を比較すると

$\alpha(p-1) = k, \quad \beta(p-1) - \alpha = l$

よって

$$\alpha = \frac{k}{p-1}, \quad \beta = \frac{l+\alpha}{p-1} = \frac{\{l(p-1)+k\}}{(p-1)^2} \quad (③)$$

②より数列 $\{a_n + (\alpha n + \beta)\}$ は初項 $a_1 + \alpha + \beta$ ，公比 p の等比数列であるので

$$a_n + (\alpha n + \beta) = p^{n-1}(a_1 + \alpha + \beta)$$

$$a_n = p^{n-1}(a_1 + \alpha + \beta) - (\alpha n + \beta)$$

ここに②を代入して

$$\begin{aligned} a_n &= p^{n-1}\left(a_1 + \frac{k}{p-1} + \frac{\{l(p-1)+k\}}{(p-1)^2}\right) \\ &\quad - \left(\frac{k}{p-1}n + \frac{\{l(p-1)+k\}}{(p-1)^2}\right) \\ &= p^{n-1}\left(a_1 + \frac{k+l}{p-1} + \frac{k}{(p-1)^2}\right) - \left(\frac{kn+l}{p-1} + \frac{k}{(p-1)^2}\right) \end{aligned}$$

(④)

このように n を用いて a_n を表すことができる．

まとめると，

$a_{n+1} = pa_n + kn + l$ ($p \neq 0, k \neq 0$)

と表せる漸化式は， n の一次式

$Q(n) = \alpha n + \beta = \frac{k}{p-1}n + \frac{\{l(p-1)+k\}}{(p-1)^2}$ を用いて

$$a_{n+1} + Q(n+1) = p\{a_n + Q(n)\}$$

という形に変形することで解くことができる．

さて，①で $p = 1$ である場合

$a_{n+1} = a_n + k'n + l'$ ($k \neq 0$) (①')

④は成り立たない．では $p = 1$ であるときに等比数列を作る，つまり

$a_{n+1} + Q(n+1) = a_n + Q(n) = a_1 + Q(1)$
の形で表そうとするときの $Q(n)$ はどのようなものだろうか．

$$Q(n) - Q(n+1) = k'n + l'$$

が成り立てばよいが，先ほどのように

$Q(n) = \alpha n + \beta$ とすると，

$$Q(n) - Q(n+1) = -\alpha$$

となり， $Q(n)$ の最高次である一次の項が消えてしまい，それ以下の次数の項が残ることがわかる．

ここから考えて $Q(n)$ を最高次2の式にす

る.

$$Q(n) = \alpha'n^2 + \beta'n + \gamma \text{ (⑤) とおくと}$$

$$\begin{aligned} Q(n) - Q(n+1) &= \alpha'n^2 + \beta'n + \gamma \\ &\quad - \{\alpha'(n+1)^2 + \beta'(n+1) + \gamma\} \\ &= -2\alpha'n - (\alpha' + \beta') \end{aligned}$$

よって

$$k'n + l' = -2\alpha'n - (\alpha' + \beta')$$

左辺と右辺を比較して

$$\alpha' = \frac{-k'}{2} \text{ (⑥)}$$

$$\beta' = -\alpha' - l' = \frac{k'}{2} - l' \text{ (⑦)}$$

このとき

$$a_n + Q(n) = a_1 + Q(1) \text{ と⑤より}$$

$$\begin{aligned} a_n &= -Q(n) + a_1 + Q(1) \\ &= -\alpha'n^2 - \beta'n - \gamma + a_1 \\ &\quad + \alpha' + \beta' + \gamma \\ &= -\alpha'n^2 - \beta'n + a_1 + \alpha' \\ &\quad + \beta' \end{aligned}$$

である(ここで計算上 $Q(n)$ に定数項 γ が必要でないということもわかる). ⑥, ⑦を代入して

$$\begin{aligned} a_n &= -\alpha'n^2 - \beta'n + a_1 + \alpha' + \beta' \\ &= \frac{-k'}{2}n^2 - \left(\frac{k'}{2} - l'\right)n + a_1 \\ &\quad + \frac{-k'}{2} + \left(\frac{k'}{2} - l'\right) \\ &= \frac{-k'}{2}n^2 - \left(\frac{k' - 2l'}{2}\right)n \\ &\quad + a_1 - l' \end{aligned}$$

と表せる.

まとめると,

$a_{n+1} = a_n + k'n + l'$ で表される漸化式は,
 n の2次式

$$Q(n) = \alpha'n^2 + \beta'n = \frac{-k'}{2}n^2 + \left(\frac{k'}{2} - l'\right)n \text{ を}$$

用いて

$$a_n + Q(n) = a_1 + Q(1)$$

と変形することで解くことができる.

また以上より,

$a_{n+1} = pa_n + f(n)$ という漸化式が与えられたとき

$f(n) = wn^s + xn^{s-1} + \dots + yn^1 + z$ (s は整数, w, x, y, z は実数)という多項式であるならば, 上記と同様にして各項の係数を利用して $Q(n)$ を予想し等比数列を作り, a_n を n を使った式で表すことができるだろうと予想される.

今回検討した方法は, $f(n)$ がある実数の n 乗の項や, (n) に関する多項式^{負の数}のような項を含んでいる場合, また漸化式で a_n の係数: q_n の関数だった場合などには適用できない. これらも今回と似た手法で解くことができたならもっと楽しいかもしれない.

参考 数研出版 チャート式基礎からの
数学Ⅱ+B

他分野における微分方程式の活用

3 年 8 組 西崎俊介

1. はじめに

数Ⅲで微分方程式について学習し、その後他分野で何度か微分方程式をみかけたのでいくつかを紹介しようと思います。今回は物理の「単振動の一般解」と化学の「反応速度」について取り上げます。

2. 微分方程式とは

はじめに微分方程式とは、 x の関数である未知の関数 y について、 x 、 y および $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ などの導関数を含む等式のことです。微分方程式に含まれる導関数の次数で、微分方程式を 1 階, 2 階, ……というように区別します。また、後述する一般解とは微分方程式の階数と同数個の任意定数を含んだ解のことで、特殊解とは一般解の任意定数に特別の値を与えたものです。

3. 単振動の一般解の導出

(i) 単振動とは

単振動とは、等速円運動をその円の直径上に投影したのと同じように動く、物体の往復運動のことです。質量 m 、位置が x の物体が受ける復元力 F をフックの法則より $F = -k(x - x_0)$ と表します。ただし、 k はばね定数で、 x_0 は平衡点 ($F = 0$ となる点) です。このときの運動方程式は、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0) \quad (1)$$

となります。整理すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x - x_0)$$

ここで $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とすると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x - x_0) \quad (2)$$

この (1), (2) 式を単振動の運動方程式と言います。

(ii) 特殊解の導出

(1)式において平衡点 x_0 からの変位を $X = x - x_0$ とおくと

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{k}{m}X \quad (3)$$

となります。

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \omega t = -\omega^2 \sin \omega t$$

より,

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} X &\propto \sin \omega t \\ X &= A \sin \omega t \end{aligned} \quad (4)$$

$t = 0$ のとき $X = x - x_0 = 0$ となりこの式が成り立ちます。

(iii) 一般解の導出

任意定数 α , β , A , B , C を用いて一般項を以下のように表します。

$$\begin{aligned} X &= A \sin(\omega t + \alpha) \\ &= A \cos(\omega t + \beta) \\ &= B \sin \omega t + C \cos \omega t \end{aligned}$$

これらの定数は初期条件によって定まり、定数の導入によりいかなる単振動も表すことができます。

4. 化学反応速度の導出

(i) 化学反応速度とは

化学反応速度とは、単位時間あたりの反応物の減少量や生成物の増加量で表されます。物質の変化量は単位体積あたりの物質量で表すことが多いです。ここでは、1 次反応（反応速度が1種類のための反応物質の濃度に比例する反応）と2次反応（反応速度が二つの反応物質のそれぞれの濃度の積に比例する反応）、またそのときの半減期（反応物の濃度が、初期濃度の半分までに減少するのにかかる時間）について記述します。

(ii) 1 次反応の導出

1 次反応 $A \rightarrow P$ における反応速度 V は次のように表記します。ここで $[A]$ は反応物の濃度, $[A]_0$ は初期状態の濃度, k は反応速度定数を表します。

$$V = -\frac{d[A]}{dt} = k[A]$$

微分方程式を解くと,

$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A]$$

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

$$\int_{[A]_0}^{[A]} \frac{1}{[A]} d[A] = -k \int_0^t dt$$

$$\ln[A] - \ln[A]_0 = -kt$$

$$\ln[A] = \ln[A]_0 - kt$$

また, 半減期は $[A] = \frac{1}{2}[A]_0$ として計算すると,

$$\ln \frac{1}{2}[A]_0 = \ln[A]_0 - kt$$

$$kt = \ln[A]_0 - \ln \frac{1}{2}[A]_0$$

$$kt = \ln \frac{[A]_0}{\frac{1}{2}[A]_0}$$

$$kt = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{k}$$

よって, 1 次反応では次のことが言えます。

・積分形速度則: $\ln[A] = \ln[A]_0 - kt$

・半減期: $t = \frac{\ln 2}{k}$

(iii) 2 次反応の導入

2 次反応 $A + A \rightarrow P$ における反応速度 V は次のように表記します。

$$V = -\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$$

微分方程式を解くと,

$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$$

$$\begin{aligned}
-\frac{d[A]}{[A]^2} &= kdt \\
-\int_{[A]_0}^{[A]} \frac{1}{[A]^2} d[A] &= k \int_0^t dt \\
\frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A]_0} &= kt \\
\frac{1}{[A]} &= kt + \frac{1}{[A]_0} \\
[A] &= \frac{1}{kt + \frac{1}{[A]_0}} \\
[A] &= \frac{[A]_0}{kt[A]_0 + 1}
\end{aligned}$$

また、半減期は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[A]_0 &= \frac{[A]_0}{kt[A]_0 + 1} \\
kt[A]_0 + 1 &= 2 \\
kt[A]_0 &= 1 \\
t &= \frac{1}{k[A]_0}
\end{aligned}$$

よって、2 次反応では次のことが言えます。

・微分形速度則： $[A] = \frac{[A]_0}{kt[A]_0 + 1}$

・半減期： $t = \frac{1}{k[A]_0}$

* 1 次反応の半減期は初速度 $[A]_0$ に依存しませんが、2 次反応の半減期は初速度 $[A]_0$ に依存する。

5. おわりに

ここまで挙げてきたものの以外に、交流回路の計算等にも用いられます。今回は微分方程式について論述しましたが、他にも数学は様々な分野に用いられます。今まで暗記するだけだった公式などの証明を調べることで数学の内容をより身近に感じられるのではないのでしょうか。

【参考文献】

[I] 東大塾長の理系ラボ, 理系ラボ「単振動 微分方程式」, 閲覧日 2024/03/17,

<https://rikeilabo.com/single-vibration-differential-equation>

[II] 晴耕雨読, 化学反応速度 (1 次反応・2 次反応), 閲覧日 2024/03/17,
<https://tex2e.github.io/blog/misc/chemical-reaction-rate>

算数編

1.

(1) 次の()内に適する数または式を答えよ.

()は 5 で割って 2 余る自然数であり, その階乗の値の 10 進数表記の末尾には 0 が 2024 個並ぶ. ただし, ある自然数に対して, その「階乗」とは, 1 からその自然数までのすべての自然数の積のことである.

(2) 面積が $A(\text{cm}^2)$ の正方形の 1 辺の長さを $\sqrt{[A]}$ (cm) と表記します. 例えば, $\sqrt{[9]} = 3$ です.

1. $\sqrt{[3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5]}$ の値は整数です. それを求めなさい.

2. $\sqrt{[1599]}$ 以下の整数の中で最大のものを答えなさい.

3. ① $1+2+3+\cdots+22$ を計算しなさい.

② $(46 - \sqrt{[2024]}) \times (46 - \sqrt{[2024]})$ は $(\sqrt{[2024]} - 44) \times (\sqrt{[2024]} - 44)$ の何倍でしょう.

2.

(1) 3 桁の正の整数の中で各桁の数の和が 9 の倍数となるものはいくつある?

(例) 123 のとき $1+2+3=6$ となる。

(2) 9 桁の正の整数の中で各桁を一の位から 3 桁ずつ分け、(1, 3 番目の数の和) - (2 番目の数) を求める。計算してできた数が 7 でも 11 でも 13 でも割り切れるのはいくつありますか。

(例) 123456789 のとき 123、456、789 に分け $123+789-456=456$ となる。

(3) 12 桁の正の整数の中で各桁を一の位から 4 桁ずつ分け、(1, 3 番目の数の和) - (2 番目の数) を求める。その値が 73 でも 137 でも割り切れる数はいくつありますか。

(例) 123456789123 のとき、1234、5678、9123 に分け、 $1234+9123-5678=4679$ となる。

3.

右図のように半円 C_1 と円 C_2 が点 T_1 点 T_2 で

接している。(点 T_1 は半円 C_1 の弧の中点)

C_1 が点線の半円 C_1' のように矢印の方向に

C_2 の円周に沿って回転する。

半径は、 C_1 は 3cm C_2 は 6 cmとする。

- (1) 二円の T_1 と T_2 が再び接するまでに C_1 は

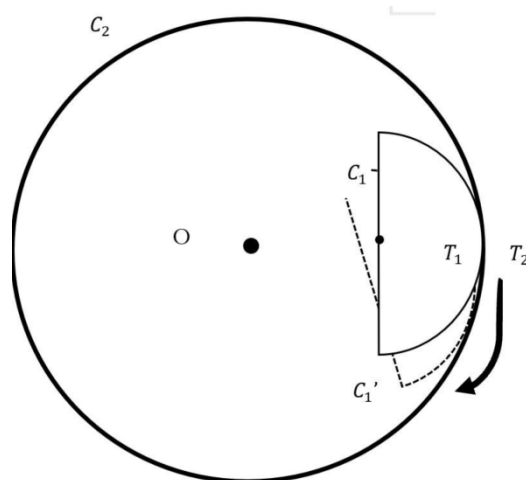
C_2 上を何周するか求めよ。

- (2) (1)のとき C_1 の中心 p が移動する距離を

求めよ。

ただし、円周率は π として答えなさい

い



4.

P,Q,R,S の 4 人が A 地点から 32.5km 離れた B 地に行こうと思います。ところが、
P

はオートバイに乗っているのですが、あと一人しか乗せることができません。そこで、はじめに Q だけに乗せて何 km 行き、Q を下ろして Q に歩いてもらい、歩いている R を迎えに引き返して R を乗せた後に何 km 行ったのちに R を下ろして R に歩いてもらい、歩いている S を迎えに引き返して S を乗せてくることに決めました。そして 4 人とも同時に出発したところ、P,R,S は同時に B 地についたのですが Q はその 13 分後に到着しました。ただし、オートバイの速さは 36km/時、Q,R,S の歩く速さはそれぞれ、7.2km/時、4km/時、8km/時であったとする。4 人が A 地点を出発してから Q が B 地に着くまでの時間を求めよ。また、4 人が同時に B 地点に到着するには P は Q を実際より何 km A または B 地点に近い場所で下ろすべきであったか答えよ。

5.

- (1) 図1のように直角三角形の周囲に三つの正方形が取り囲む図形があるとする。
これら三つの正方形の内、最も大きな正方形の面積は他の二つの正方形の面

積の和と等しいことを示せ。

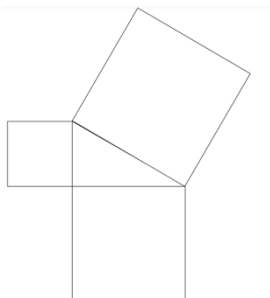


図 1

(2)図 2 はある立体の展開図で、1つの正方形と 4つの合同なひし形と二等辺三角形からできています。これを組み立てて正方形が底面になるように机の上に置くと高さは 8cm になりました。正方形の一边を 6cm, ひし形の一边を 5cm である時、この立体の体積を求めよ。

(3)図 3 はある凸立体の展開図で、1つの正方形と 4つの合同な二等辺三角形と 8つの合同な二等辺三角形からできています。これを組み立てて正方形が底面になるように机の上に置くと高さは 20cm になりました。正方形の一边を 20cm で、全ての二等辺三角形の等しい二辺の長さが 15cm である時、この立体の体積を求めよ。

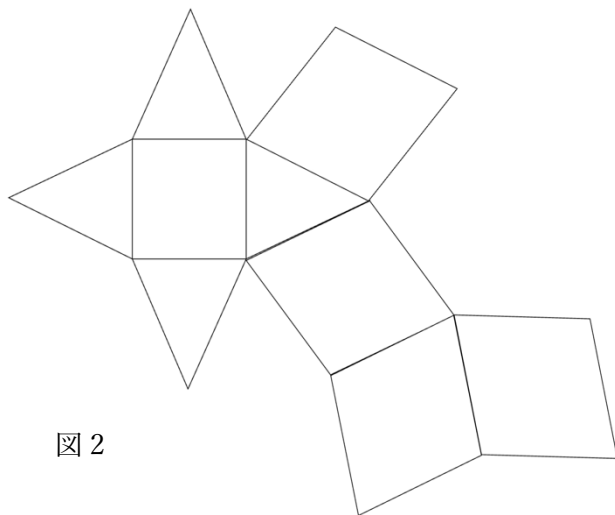


図 2

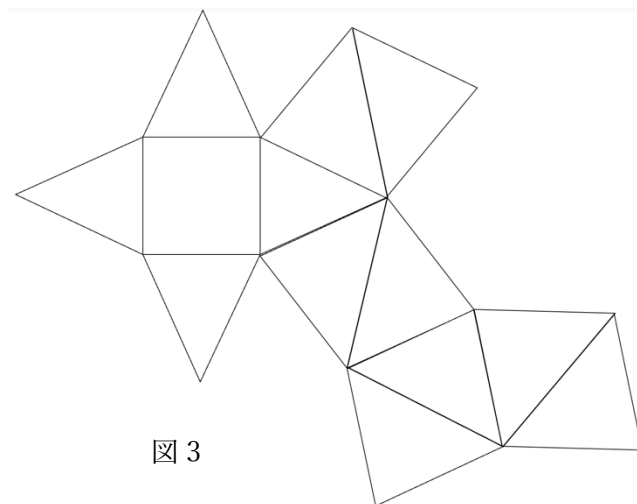


図 3

1.

【講評】

(1) 典型的な問題ですから,着実に計算して考えるのが最善かと思われます.

(2) 1. 交換法則万歳.

2. 「挟んで評価する」考え方の初歩となる典型問題ですね.

3. ①この意味深な設問は…?

②やや突飛な発想が必要かもしれません.

【解説】

(1) 「ある自然数(の 10 進数表記)の末尾に 0 が〇〇個並んでいる」ことの言い換えを考えます.これは,「その自然数の因数として 10 が〇〇個存在している」ことに他なりません.さらに,今回は「その自然数」とは求めたい自然数の階乗の値なので,そこに含まれる因数 5 の数は因数 2 の数よりも明らかに少なく,因数 10 の数(=2 と 5 のペアの数)は

因数 5 の数と等しいとわかります.またその数は,階乗の定義により,「求めたい自然数以下の自然数のうち,5 の倍数,25 の倍数,125 の倍数, …の個数の合計」です.この値が

2024 なのです.

上記の $[\]$ は,求めたい自然数の約 $1/5$ の値と約 $1/25$ の値と約 $1/125$ の値…の合計,すなわち求めたい自然数の「だいたい」 $1/4$ の値であろうと推測できるので,求めたい自然数は $2024 \times 4 = 8096$ から「遠い」値ではないと考えます.あとは地道な計算により,

$[\]$ の値が 2024 となるような自然数は,8110 から 8114 までの 5 つだとわかり,求める自然数は 5 で割って 2 余るとのことで,その値は 8112 です.

(2) 1. $\sqrt{[3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5]} = \sqrt{[3 \times 3 \times 5 \times 3 \times 3 \times 5]} = \sqrt{[45 \times 45]} = 45$

2. $\sqrt{[1600]} = 40$ からあたりをつけて, $\sqrt{[1521]} = 39$ さえ分かれば, $39 < \sqrt{[1599]} < 40$ が分かり,答えは 39 と求まります.

3. ① $(1+2+3+\cdots+22)+(22+21+20+\cdots+1) = (1+22)+(2+21)+(3+20)+\cdots+(22+1)$
 $= 23 \times 22 = 506$ より,求める和は $506 \div 2 = 253$ です.

②【解法 1】(一応の想定解法だが,割と技巧的)

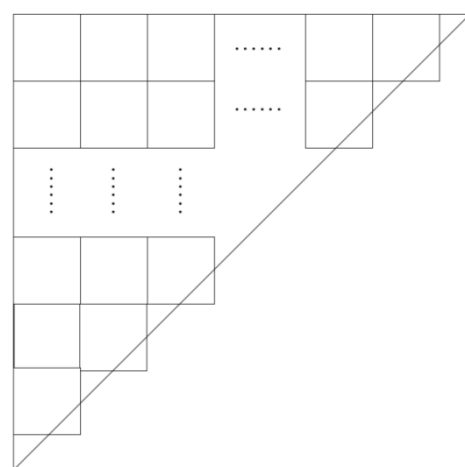
1cm 角の正方形を「階段状」に 22 段積み上げた状態を考えます.この図形の面積は,①より 253cm^2 です.続いて,この図形に面積が同じく 253cm^2 の直角二等辺三角形(等辺の長さは $\sqrt{[506]}$ cm)を,直角と二等辺がピッタリ重なるように同じ平面上に置きます.すると,この直角二等辺三角形の斜辺の上と下にそれぞれ,階段部分のギザギザで直角を成す小さな直角二等辺三角形たちが 22 個と 23 個できます.そしてこの上の 22 個(等辺の長さは $(23-\sqrt{[506]})\text{cm}$)と下の 23 個(等辺の長さは $(\sqrt{[506]} - 22)\text{cm}$)はそれぞれ,等面積の異なる 2 つの図形から,共通の部分を除いたもののなので,同様に等面積となっています.さて,このことを等式として表すと(単位は省略),

$$\{(23-\sqrt{[506]}) \times (23-\sqrt{[506]}) \div 2\} \times 22 = \{(\sqrt{[506]} - 22) \times (\sqrt{[506]} - 22) \div 2\} \times 23$$

さらに, $\sqrt{[2024]} = \sqrt{[2 \times 2 \times 506]} = 2 \times \sqrt{[506]}$ も用いてこの式を変形すると,

$$(46-\sqrt{[2024]}) \times (46-\sqrt{[2024]}) = (\sqrt{[2024]} - 44) \times (\sqrt{[2024]} - 44) \times 23/22$$

こうして,求めたかった答えは 23/22 倍だと分かりました.



【解法 2】(誘導の意図を無視するが,幾分一般的)

もはや中学 3 年の代数計算と同じことをしてしまいますが,普通に計算するだけです.

それぞれ展開したものの比を簡単にすると,まったく同じ結果を得ます.

2.

- (1) 各桁の和が 9 の倍数となるときの元の数も 9 の倍数だから 3 桁の 9 の倍数の個数を求めて 100 個
- (2) 9 桁の数を $1000000a + 1000b + c$ (a は 3 桁の自然数 b, c は 0 以上 999 以下の自然数) とすると $1000000 = 999999 + 1 = 1001 \times 999 + 1$, $1000 = 1001 - 1$ から 9 桁の数は $1001(999a + b) + (a - b + c)$ であり $a - b + c$ が 1001 の倍数ならば元の数も 1001 の倍数であることがわかる。7 でも 11 でも 13 でも割り切れるものは $7 \times 11 \times 13 = 1001$ から 1001 の倍数であるから、求める個数は 9 桁の 1001 の倍数を求めて 899100 個
- (3) 12 桁の数を $100000000a + 10000b + c$ (a は 4 桁の自然数 b, c は 0 以上 999 以下の自然数) とすると $100000000 = 10001 \times 9999 + 1$, $10000 = 10001 - 1$ から 12 桁の数は $10001(9999a + b) + (a - b + c)$ であり $a - b + c$ が 10001 の倍数ならば元の数も 10001 の倍数である。73 でも 137 でも割り切れるものは $73 \times 137 = 10001$ から 10001 の倍数であ

るから求める個数は 12 桁の 10001 の倍数を求めて 89991000 個

3.

(1) T_1 が再び円周に接するまでを考えると、

① ④のように円周同士が接するとき

C_1 の中心角 90 度分の円周つまりそれぞれ C_2 の中心角 45 度分の回転

② ③のように角のみが接するとき

破線のように一辺 3 c m の正三角形ができるので C_2 の中心角 60 度分の回転

よって T_1 が再び円周に接するまで C_2 の中心角 1 5 0 度分の回転

$\frac{150}{360} = \frac{5}{12}$ より C_1 が 12 回転することで C_2 の円周上を 5 周して T_1T_2 で接する。

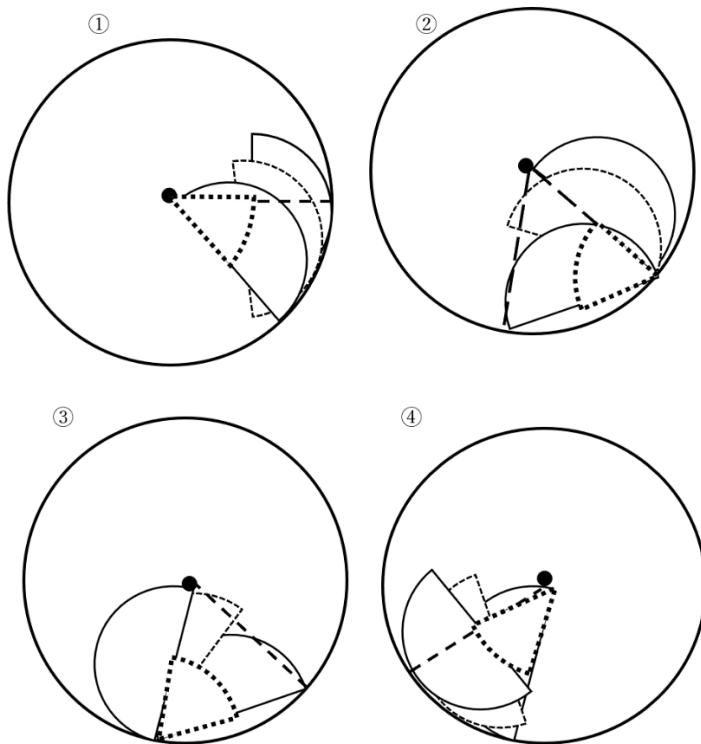
(2) T_1 が再び円周に接するまでを考えると、点線のように

③ ④では p はそれぞれ半径 3 cm 中心角 45 度の弧を描く

④ ③では p はそれぞれ半径 3 cm 中心角 60 度の弧を描く

よって T_1 が再び円周に接するまで $6 \times \pi \times \frac{45 + 60 + 60 + 45}{360} = \frac{7}{2} \pi$ (c m)

C_1 は 12 回転するので $\frac{7}{2} \pi \times 12 = 42\pi$ (c m)



4.

右下の図のように地点 C,D,E,F,G を定める。ただし、G 地は P,R,S が B 地に着いたときに Q がいた場所を指すものとする。P、R の速さはそれぞれ 36km/時、4km/時のため

AC: (AE + EC) = 4:36 = 1:9 となり、AC=①とすると AE=⑤、CE=④となる。…①

またBF: (DF + BD) = 4:36 = 1:9 となり BF=△とすると BD=△、DF=△となる。…②
同様に、P と S の速さ比は 18:4 のため、AD=□とすると AE+CE+CF+DF=□となる。

①より、EF+DF=□ - (⑤ + ④ + ④) = □ - ⑬となり DE=AE-AD=⑤-□ となる。

よって、DF= $\frac{(\square - \textcircled{13}) + (\textcircled{5} - \square)}{2} = \square - \textcircled{4}$ である。…③

さらに、P と Q の速さ比は 5:1 であるため、(BD + DF + CF + CE):EG = 5:1 となり、

BD + DF + CF + CE = △ + □ - ⑤より、EG = 1 + □.6 - ①となる。…④

Q の速さは 7.2km/時で、BG 間の時間は 13 分より、BG=1.56 k m である。…⑤

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{5} \text{より、} \begin{cases} AB = AE + EG + BG = \textcircled{5} + \triangle + \boxed{3.6} - \textcircled{1} + 1.56 = \textcircled{4} + \triangle + \boxed{3.6} + 1.56 \\ AB = AD + DF + BF = \boxed{4} + \boxed{7} - \textcircled{4} + \triangle = \boxed{11} - \textcircled{4} + \triangle \\ AB = AD + BD = \boxed{4} + 5 \end{cases}$$

となり、
$$\begin{cases} \textcircled{1} = \frac{\boxed{7.4} - 1.56}{8} \\ \triangle = \frac{\boxed{6.6} + 1.56}{8} \end{cases} \text{となる。}$$

よって、 $AB = \boxed{4} + 5 = \frac{\boxed{65} + 7.8}{8}$ となり、 $AB = 32.5 \text{ km}$ より、 $AD = \boxed{4} = 15.52 \text{ km}$ である。

$BD = AB - AD = 16.98 \text{ km}$ であるので、S が A から B に移動するのにかった時間は、

$$\frac{15.52}{8} + \frac{16.98}{36} = \frac{28.94}{12} \text{ 時間} = 2 \text{ 時間 } 24 \text{ 分 } 42 \text{ 秒で、これは Q が A から G に移動するのにかった}$$

た時間であり、Q が G から B に移動するのにかった時間は 13 分のため、4 人が A 地点

を出発してから Q が B 地に着くまでの時間は **2時間37分42秒** である。

この時、 $AE = \textcircled{5} = 5 \cdot \frac{\boxed{7.4} - 1.56}{8} = 16.97 \text{ km}$ である。... **⑥**

一方、4 人が同時に B 地点に到着するようにするには、 $BG = 0$ であればよいので、

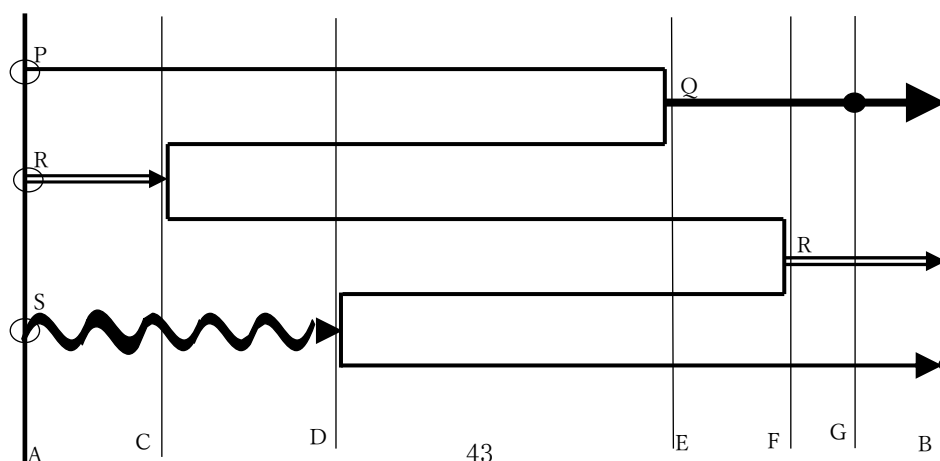
$$\begin{cases} AB = AE + EG + BG = \textcircled{5} + \triangle + \boxed{3.6} - \textcircled{1} = \textcircled{4} + \triangle + \boxed{3.6} \\ AB = AD + DF + BF = \boxed{4} + \boxed{7} - \textcircled{4} + \triangle = \boxed{11} - \textcircled{4} + \triangle \\ AB = AD + BD = \boxed{4} + 5 \end{cases} \text{ となり、} \begin{cases} \textcircled{1} = \boxed{0.925} \\ \triangle = \boxed{0.825} \end{cases}$$

よって、 $AB = \boxed{4} + \triangle = \boxed{8.125} = 32.5 \text{ km}$ となり、 $\boxed{1} = 16 \text{ km}$ であるため

$AE = \textcircled{5} = 0.925 \cdot 16 = 14.8 \text{ km}$ である。... **⑦**

よって、**⑥**、**⑦**より、4 人が同時に B 地点に到着するには、P は Q を実際より

$16.97 - 14.8 = \boxed{2.17 \text{ km}}$ だけ A 地点に近い場所で下ろすべきであったといえる。



5.

(1) 三平方の定理の証明です。

右の図のように頂点に A、B……I とふると、

$BC \parallel AG$ より、 $\triangle BCD = \triangle BCG \cdots \textcircled{1}$

$\triangle BCG$ と $\triangle DCQ$ において $BC = DC$ 、 $CG = CQ$ 、

$\angle BCG = \angle BCD + \angle DCG = \angle GCQ + \angle DCG = \angle DCQ$ より、

$\triangle BCG$ と $\triangle DCQ$ は合同なため、 $\triangle BCG = \triangle DCQ \cdots \textcircled{2}$

$CQ \parallel DI$ より、 $\triangle DCQ = \triangle CQI \cdots \textcircled{3}$

よって $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ より、 $\triangle BCD = \triangle CQI$ となり、

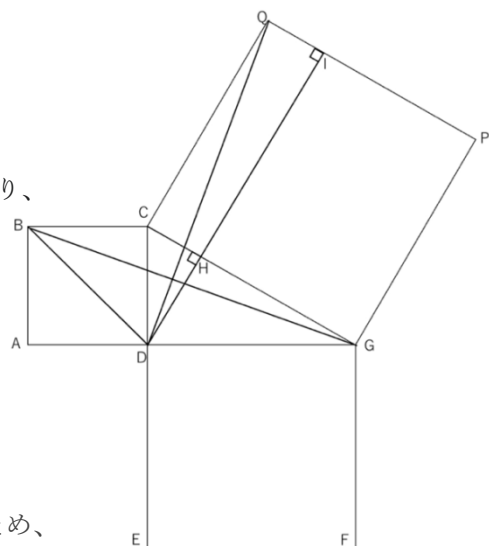
$\triangle BCD = \triangle ABD$ 、 $\triangle CQI = \triangle CQH$ のため、

正方形 $ABCD$ の面積と長方形 $CHIQ$ の面積は等しいと言える。

同様に正方形 $DEFG$ と長方形 $GHIP$ の面積も等しいため、

$(\text{正方形 } ABCD) + (\text{正方形 } DEFG) = (\text{長方形 } CHIQ) + (\text{長方形 } GHIP) = (\text{正方形 } CQPG)$

となり示された。(証明終わり)



(2) 問題で与えられた展開図を組み立てると右のようになる。

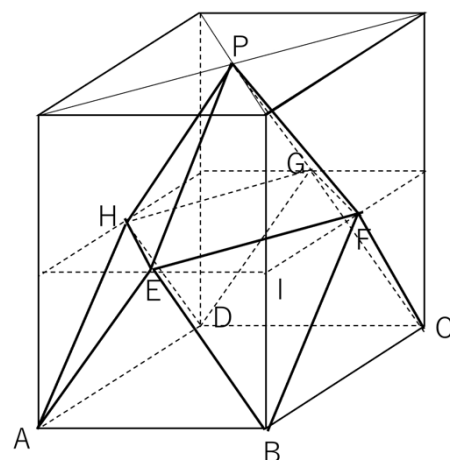
この図形は底面が一辺 6cm の正方形で 8cm の直方体に入り、正方形 EFGH は底面から 4cm の高さにあるので、この体積を立体を上下に分けて考えることとする。

上半分:対角線の長さが 8cm の正方形が底面で高さが 4cm の四角錐のため、体積は $12 \times 12 \div 2 \times 4 \div 3 = 96 \text{ cm}^3$

下半分:底面が一辺 8cm の正方形で高さが 4cm の直方体から 4 つの合同な三角錐を取り除いたものである。その三角錐の一つが三角錐 B-EIF で、これは底面が $3 \times 3 \div 2 = 4.5$

cm^2 の三角形で高さは 4cm なので、体積は $4.5 \times 4 \div 3 = 6 \text{ cm}^3$ である。よって求める立体の下半分の体積は $8 \times 8 \times 4 - 6 \times 4 = 232 \text{ cm}^3$ となる。

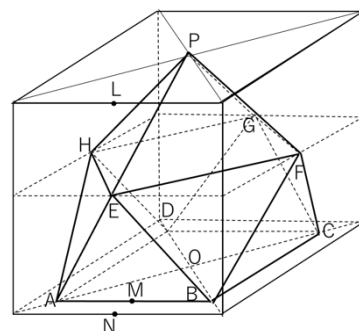
よって求める体積は $96 + 232 = \underline{328 \text{ cm}^3}$ となる。



(3) 問題で与えられた展開図を組み立てると右の図のようになる。

外側の直方体の上側の底面の辺の一つの中点を L、下側の底面の辺の中点を N、AB の中点を M、AC と BD の交点を O

とすると、 $AB = 20\text{cm}$ 、 $AE = BE$ より $\angle EMB = 90^\circ$ 、 $BM = 10\text{cm}$

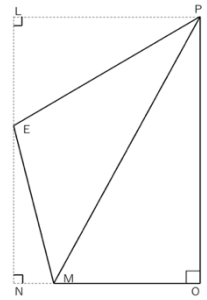


とわかる。

一方(1)より $BM^2 + EM^2 = BE^2$ であるので

$$EM^2 = 15^2 - 10^2 = 125 \text{ となる。} \cdots \textcircled{1}$$

ここで、3点 PEO が含まれる平面でこの立体を切断すると、



右図のようになる。MO=10cm、EP=15cm、OP=20cm で、①より、

$EM^2 = 125$ である。また、この立体が凸多面体であることを考えると、この

立体の形状はい一つに定まる。

ここで、LE=9cm と仮定すると、EP=15cm より、LP=12cm となり、MO=10cm

から、NM=2cm となる。①より、 $EM^2 = 125$ で、(1)より、

$$EN^2 = EM^2 - NM^2 = 125 - 2^2 = 121 \text{ となり、} EN = 11\text{cm} \text{ となる。}$$

よって PO=LE+EN=9+11=20cm となり、これは条件を

満たす。

右図において、四角錐 U-QRST と四角錐 U-ABCD で、

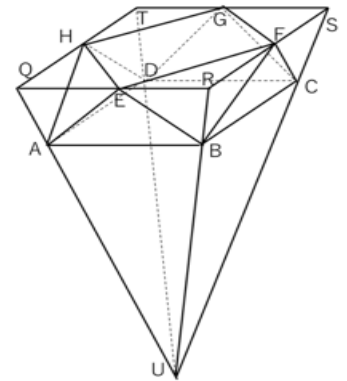
$QR:AB = 24:20 = 6:5$ であり、面 QRST から面 ABCD におろした

垂線の長さが 11cm であるので、U から面 QRST に下した垂線

の長さは 66cm である。

よって、求める立体の下半分の体積は

$$24 \times 24 \times 66 \div 3 \times \left(1 - \frac{5^3}{6^3}\right) - 4 \times 12 \times 12 \div 2 \times 11 \div 3 = \frac{12848}{3}$$



一方で上半分は底面が対角線の長さが 20cm の正方形で高さが 9cm の四角錐

であるので体積は $20 \times 20 \div 2 \times 9 \div 3 = 600 \text{ cm}^3$ である。

よって求めたい立体の体積は $\frac{12848}{3} + 600 = \frac{14648}{3} \text{ cm}^3$ である。

注)中学生以上であれば、LE の長さを Xcm としておき、二次方程式を用いて

LE の長さを求める方が一般的である。

三平方の定理より、 $PL^2 = 15^2 - X^2 = 225 - X^2$ 、 $NM^2 = 125 - (20 - X)^2 = -X^2 + 40X - 275$

で、

$MO = 10\text{cm}$ と、 $PL^2 = (NM + MO)^2 = NM^2 + MO^2 + 2NM \cdot MO$ より、

$225 - X^2 = -X^2 + 40X - 275 + 10^2 + 2\sqrt{-X^2 + 40X - 275} \cdot 10$ となる。

よって、 $20 - 2X = \sqrt{-X^2 + 40X - 275}$

$$\Leftrightarrow (20 - 2X)^2 = -X^2 + 40X - 275 \wedge X \leq 5$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 24X + 135 = 0 \wedge X \leq 5$$

よって $X = 9\text{cm}$ となり、上記の解答のようになる。

中学数学編

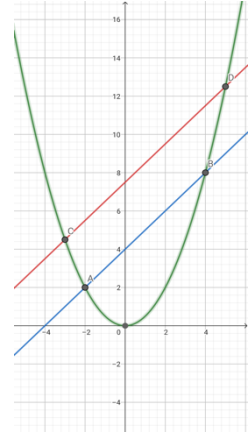
1.

図のように、放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にある点 A、B、C、D について、

直線 AB と直線 CD は平行で、点 A、B の座標はそれぞれ

$(-2, 2)$ 、 $(4, 8)$ である。また、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{21}{2}$ である。

- (1) 点 C、D の座標を求めなさい。
- (2) 直線 AB と y 軸の交点を点 E とするとき点 E を通り四角形 ABDC を二等分する直線の式を求めよ。



2.

a, b, m, n は実数で、 $a \leq b, m \leq n$ とする。 $x=a, x=b, y=x^2+m, y=x^2+n$ で囲まれた部分の面積を a, b, m, n を用いて表せ。

3.

二次関数 $y=x^2$ と点 $R(0,7)$ を中心とする円がある。 $y=x^2$ と円の交点のうち、2 つの点の座標を A, B とおき、原点の座標を O とすると、 $\triangle ABO$ の面積は 15 で、 $\triangle ABR$ の面積は $\frac{5}{2}$ だった。点 P を $y=x^2$ 上の点とし、 $\triangle ABP$ の面積が 10 になるときの P の座標を求めよ。

4.

線分 $AB < \text{線分 } AC$ の $\triangle ABC$ が円 O に内接している。A で接する円 O の接線と直線 BC との交点を D とする。線分 AB の長さ、線分 DB の長さが等しく、線分 DA の長さと線分 AC の長さと線分 BC の長さが等しい。直線 DO と円 O の交点を、D から近い順に E, F とする。 $\angle ADF$ の二等分線と円 O との交点のうち劣弧 AF 上にある点を G として、直線 DG と直線 EH が平行になるように円 O 上に H を定め、直線 HO と円 O の交点のうち、H ではない点を I とする。BC の長さが $2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ cm とき、扇形 BOI の面積を求めよ。

5.

一辺が 10 寸で $\angle ACB=60^\circ$ のひし形 ACBD がある。なお、(1)(2)の O、P、Q は異なる点を表すものとする。

(1) $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ の外心を P, Q とする。P, Q を中心とする半径が等しく互いに

外接する円を描き、それらをそれぞれ円 P、円 Q とする。また、C を通り、円 Q と接する直線のうち、線分 AD と共有点を持つ直線を L とする。ここで線分 AC 上で円 P と接し、線分 AC と直線 L に接する円を円 O とするとき円 O の半径の長さを求めよ。

(2) 四角形 ACBD の内接円の中心を O とする。線分 AD と線分 BD と接し、円 O と外接する円を円 P とする。また、中心が $\triangle OBD$ 内にあり、中心が A で半径 10 寸の円に内接し、円 O に外接し CD に接する円を円 Q とする。円 P、Q の半径をそれぞれ求めよ。

6.

(1) n を自然数とする。

1 辺が 1cm の正方形 ABCD において、辺 AD, BC 上にそれぞれ、点 A から近い順に、点 A, D とは相異なる $n-1$ 個の点 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ を、点 B から近い順に、点 B, C とは相異なる n 個の点 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ を、折れ線 $A\beta_1 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_1\beta_2 + \dots + \alpha_{n-1}\beta_n + \beta_n D$ が最短となるようにとる。

このとき、この折れ線を辺 CD を軸として 1 回転させてできる面の面積を n を用いて表すと $()\text{cm}^2$ である。

(2) 全ての自然数 n において $n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+4) \equiv 0 \pmod{60}$

であることを示せ。

1.

(1)

点 C を直線 CD と y 軸の交点に移動させる。

このとき直線 AB の式は $y=x+4$ で直線 CD の式を $y=x+k$ とすると、

$$(k-4) \times \{4-(-2)\} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{2} \quad \text{よって} \quad k = \frac{15}{2} \quad \text{なので}$$

直線 CD の式は $y=x+\frac{15}{2}$

$y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=x+\frac{15}{2}$ を連立して解いて、 $x=-3, 5$

よって点 C, D の座標は $(-3, \frac{9}{2}), (5, \frac{25}{2})$

(2)

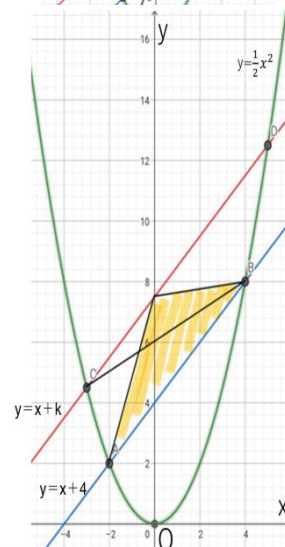
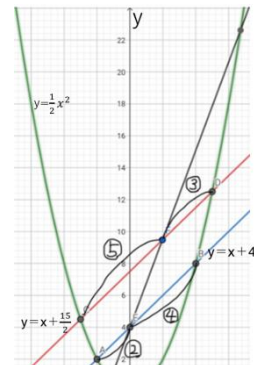
求める直線と直線 CD の交点を点 F とし、その x 座標を f とする。

AB//CD より、四角形 AEFC : 四角形 EBDF は、

(AE+CF) : (EB+DF) で求めることができるので、

$2 + \{f-(-2)\} = 4 + (5-f)$ よって $f=2$ となるので点 F の座標は $(2, \frac{19}{2})$

点 E と点 F を通る直線の式は $y=\frac{11}{4}x+4$



2.

求める面積は右図の黒い部分の面積である。

この黒い部分が $x=a, x=b$ と触れている部分の長さは $n-m$ で、

$x=a$ と $x=b$ 間の距離は $b-a$ である。二つの放物線は合同なため、

黒い部分を等積変形すると縦の長さが $n-m$ 、横の長さが $b-a$

の長方形となるので、求める面積は $(n-m)(b-a)$

3.

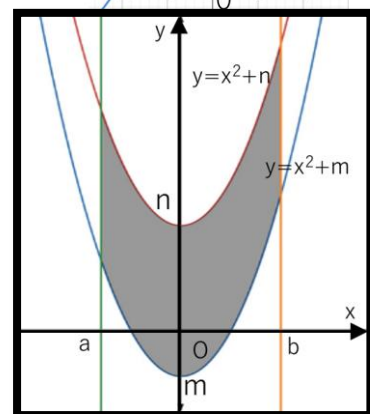
点 A, B の x 座標をそれぞれ a, b とすると、点 A, B は $y=x^2$ 上にあるから

$A(a, a^2), B(b, b^2)$ と表せる。AR=BR より、三平方の定理から、

$$a^2 + (a^2 - 7)^2 = b^2 + (b^2 - 7)^2 \quad a^4 - 13a^2 + 49 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) - 13(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a^2 + b^2 - 13)(a^2 - b^2) = 0$$

よって、 $a^2 + b^2 - 13 = 0 \cdots \textcircled{1}$ または $a^2 - b^2 = 0, a \neq b$ より $a = -b \cdots \textcircled{2}$



次に、

$\triangle ABO$

の面積

は 15

だから、

三角形の面積公式より、

$$\frac{1}{2}(a^2b - ab^2) = \pm 15 \quad ab^2 = a^2b \pm 30 \cdots \textcircled{3}$$

次に、 $\triangle ABR$ の面積は $\frac{5}{2}$ だから、三角形の面積公式より、

$$\frac{1}{2}\{b(a^2 - 7) - a(b^2 - 7)\} = \pm \frac{5}{2}$$

$$a^2b - 7b - ab^2 + 7a = \pm 5 \cdots \textcircled{4}$$

③を④に代入して、 $a^2b - 7b - (a^2b \pm 30) + 7a = \pm 5 \Leftrightarrow 7a - 7b \pm 30 = \pm 5$
 ± 30 と ± 5 の符号は異なるから、

$$7a - 7b = \pm 35 \quad a - b = \pm 5 \quad a = b \pm 5 \cdots \textcircled{5}$$

⑤を①に代入すると、 $b^2 \pm 10b + 25 + b^2 - 13 = 0$

$$2b^2 \pm 10b + 12 = 0$$

$$b^2 \pm 5b + 6 = 0$$

$$(b+2)(b+3) = 0 \cdots \textcircled{6} \text{ または } (b-2)(b-3) = 0 \cdots \textcircled{7}$$

(1)⑥のとき、 $b = -2, -3$ $a = b + 5$ より、 $(a, b) = (3, -2), (2, -3)$

$A(3, 9)B(-2, 4)$ または $A(2, 4)B(-3, 9)$

(2)⑦のとき、 $b = 2, 3$ $a = b - 5$ より、 $(a, b) = (-3, 2), (-2, 3)$

$A(-3, 9)B(2, 4)$ または $A(-2, 4)B(3, 9)$

(1), (2)より、 A と B の座標は $(3, 9)$ と $(-2, 4) \cdots \textcircled{8}$ または $(2, 4)$ と $(-3, 9) \cdots \textcircled{9}$

次に、⑤を②に代入すると、 $b \pm 5 = -b$

$$2b = \pm 5 \quad b = \pm \frac{5}{2}$$

②を③に代入すると、 $-b^3 = b^3 \pm 30 \Leftrightarrow 2b^3 = \pm 30 \Leftrightarrow b^3 = \pm 15$

$b = \pm \frac{5}{2}$ を代入すると式が成り立たないから、②は不適次に、⑧のとき、

直線 AB は $y = x + 6$ 点 R から AB に下ろした垂線は $y = -x + 7$ となり、

この 2 直線の交点の座標 Q_1 は $(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$

R は Q_1 から x 軸方向に $-\frac{1}{2}$ 、 y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 移動させた点であり、

$\triangle ABR$ の面積は $\frac{5}{2}$ だから、等積変形の考えを用いて、点 P は Q_1 から x 軸方向に -2 、

y 軸方向に 2 移動させた点を通る傾き 1 の直線上、

また Q_1 から x 軸方向に 2 、 y 軸方向に -2 移動させた点を通る傾き 1 の直線上にある。

従って点 P は $y = x^2$ と $y = x + 10$ の交点、また $y = x^2$ と $y = x + 2$ の交点だから、

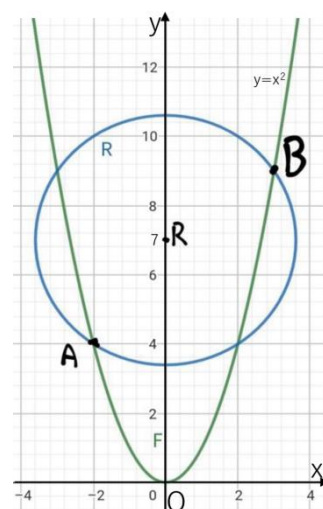
$$\text{点 } P \text{ は } \left(\frac{1+\sqrt{41}}{2}, \frac{21+\sqrt{41}}{2}\right) \left(\frac{1-\sqrt{41}}{2}, \frac{21-\sqrt{41}}{2}\right) (-1, 1)(2, 4)$$

⑨のとき、直線 AB は $y = -x + 6$ 点 R から AB に下ろした垂線は $y = x + 7$ となり、こ

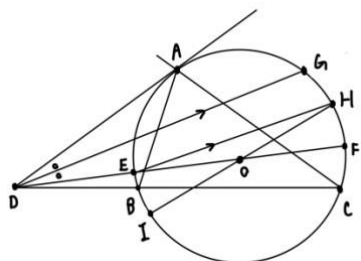
の 2 直線の交点の座標 Q_2 は $(-\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$

R は Q_2 から x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 、 y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 移動させた点であり、

$\triangle ABR$ の面積は $\frac{5}{2}$ だから、等積変形の考えを用いて、点 P は Q_2 から x 軸方向に 2 、 y 軸方

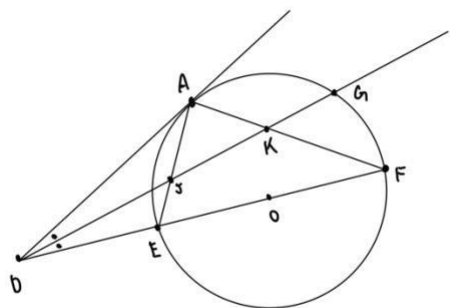


4.



∠BOI の角度を求める→円 O の半径を求める→扇形 BOI の面積を求める

弧 AB の円周角の定理より、 $\angle AOB = 2\angle ABC$ ⑤より $\angle AOB = 72^\circ$ …⑥ 直線 DG と直線 AE の交点を J、直線 DG と直線 AF の交点を K とする。



52

$\angle ADE$ は二等分されているので $\angle ADK = \angle EDJ \cdots ⑦$

$\angle DAK = \angle DAJ + \angle EAF \cdots ⑧$ 外角の定理より、 $\angle DEJ = \angle AFE + \angle EAF$

$\cdots ⑨$ 接弦定理より、 $\angle DAJ = \angle AFE \cdots ⑩$

⑧⑨⑩より、 $\angle DAK = \angle DAJ + \angle EAF = \angle AFE + \angle EAF = \angle DEJ \therefore \angle DAK = \angle DEJ \cdots ⑪$

⑦⑪より、 $\triangle DAK$ の $\triangle DEJ$ (二角相等) 対応する角は等しいので $\angle AKD = \angle EJD$ 対

頂角より $\angle EJD = \angle AJG$ なので

$\angle AKD = \angle AJG \cdots ⑫$ 円周角の定理より $\angle EAF = 90^\circ \cdots ⑬$ 内

角の和は 180° より、 $180^\circ = \angle AKD + \angle AJG + \angle EAF \cdots ⑭$

⑫⑬⑭より $180^\circ = \angle AKD + \angle AJG + \angle EAF = 2\angle AJG + 90^\circ$

$2\angle AJG = 90^\circ$ よって $\angle AJG = 45^\circ \cdots ⑮$ 直線 DG と直線 EH が平

行なので同位角が等しいので $\angle AJG = \angle AEH$

⑮より、 $\angle AEH = 45^\circ \cdots ⑯$ 弧 AH の円周角の定理より

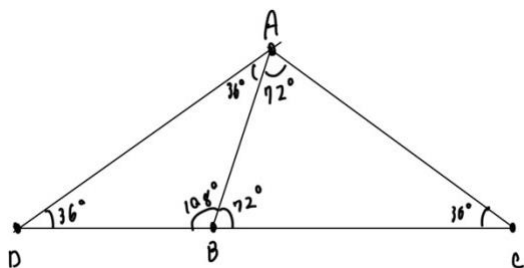
$\angle AOH = 2\angle AEH$

⑯より、 $\angle AOH = 90^\circ$

よって $\angle AOI = 180^\circ - \angle AOH = 90^\circ \cdots ⑰$

つまり $\angle BOI = \angle AOI - \angle AOB$ ⑥⑰より、 $\angle BOI = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ \cdots$

⑱



上図より、線分 $AB : \text{線分 } AD = \text{線分 } AD : \text{線分 } DC$ 線分 AB

$= \text{線分 } DB$ 、線分 $AD = \text{線分 } BC$ より

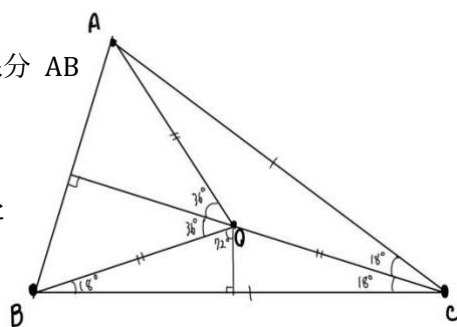
線分 $AB : \text{線分 } AD = \text{線分 } AD : \text{線分 } AB + \text{線分 } AD$

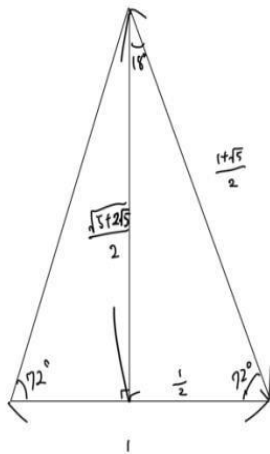
この時 AB の長さを 1 とし、 AD の長さを x とすると

$$1 : x = x : 1 + x \text{ となり、 } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ となる。} \cdots ⑲$$

$\triangle OBC$ は右図のような角度をもつ。

⑲より下図のような辺の比がわかる。





よって $BC : BO = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

円 O の半径 BO は $BO = \frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 4$

よって⑬より扇形 BOI の面積は $4 \times 4 \times \pi \times \frac{18}{360} = \frac{4}{5}\pi$

5.

(1)設問の図は右のようになる。なお、いくつかの点や直線を付け加えた。

正三角形における内心と外心と重心は一致するので、円 P, Q はそれぞれ $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ の 3 辺の中点で接し、二円は線分 AB の中点で外接する。

また、 $DQ : QG = CP : PG = 2 : 1$ である。

$\triangle QHC$ と $\triangle EIC$ において $\angle QHC = \angle EIC = 90^\circ$, $\angle QCH = \angle ECI$ (共通)

であるため、二辺夾角相等より $\triangle QHC \sim \triangle EIC$

よって、 $EI : EC = QC : QH = (QG + 3PG) : QG = 4 : 1$

とわかり、三平方の定理より、

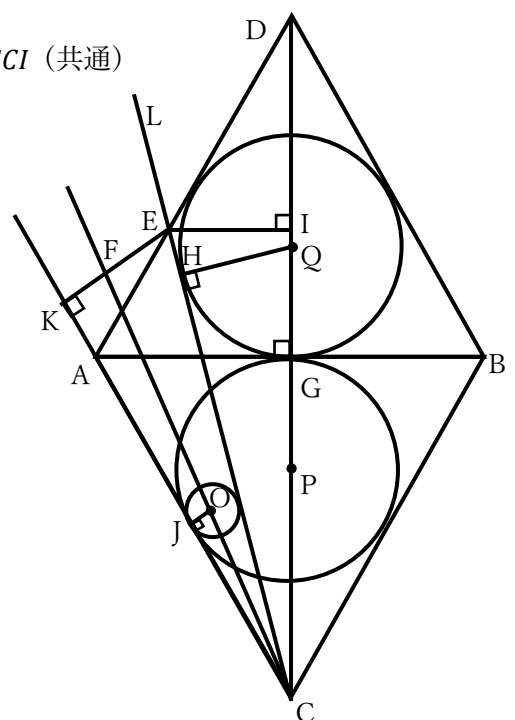
$EI : IC = 1 : \sqrt{4^2 - 1^2} = 1 : \sqrt{15}$ である。...①

一方、 $EI \parallel AG$ より、 $\triangle DEI \sim \triangle DAG$ で、
G は AB の中点のため

$AG : DG = 1 : \sqrt{3}$ より、 $EI : DI = 1 : \sqrt{3}$ である。...②

よって①②より、 $DI : IC : EI = \sqrt{3} : \sqrt{15} : 1$ とわかり

$CG = DG = 5\sqrt{3}$ 寸のため、



$$DI = \frac{5\sqrt{15}-5\sqrt{3}}{2}, IC = \frac{25\sqrt{3}-5\sqrt{15}}{2}, EI = \frac{5\sqrt{5}-5}{2} \text{ であるといえる。 (単位：寸)}$$

$$\therefore DE = (5\sqrt{5} - 5) \text{ 寸}, EC = (10\sqrt{5} - 10) \text{ 寸とわかる。}$$

$$(\because DE : EI = 2 : 1, EI : EC = 1 : 4) \dots \textcircled{3}$$

AD = 10 寸で、 $\angle DAB = \angle CAB = 60^\circ$ より $\angle EAK = 60^\circ$ のため、

$$KA = \frac{10-DE}{2} = \frac{15-5\sqrt{5}}{2} \text{ 寸}, AC + KA = 10 + \frac{15-5\sqrt{5}}{2} = \frac{35-5\sqrt{5}}{2} \text{ 寸である。} \dots \textcircled{5}$$

CF は O を通り、円 O は CK、CE と接するため CF は $\angle ECK$ を二等分し

$$EF : FK = CE : CK \text{ となり、} FK = EK \cdot \frac{CK}{CK+CE} \dots \textcircled{6}$$

$\triangle CFK$ と $\triangle COJ$ において $\angle CKF = \angle CJO = 90^\circ$, $\angle FCK = \angle OCJ$ (共通) であるため
二辺夾角相等より $\triangle CFK \sim \triangle COJ$

よって、 $FK : CK = OJ : CJ$ となり $CJ = 5$ 寸より

$$OJ = FK \cdot \frac{CJ}{CK} = EK \cdot \frac{CK}{CK+CE} \cdot \frac{CJ}{CK} = EK \cdot \frac{CJ}{CK+CE} = \frac{15\sqrt{3}-5\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{5}{\frac{35-5\sqrt{5}}{2}+10\sqrt{5}-10} = \frac{5\sqrt{15}-10\sqrt{3}}{3} \text{ 寸}$$

よって、円 O の半径は $\frac{5\sqrt{15}-10\sqrt{3}}{3}$ 寸 であるといえる。

～別解 1(高校数学の三角関数を用いる方法)～

本解の①より $\tan \angle ECI = \frac{1}{\sqrt{15}}$ で、 $\tan \angle ACD = \frac{1}{\sqrt{3}}$ より、加法定理から、

$$\tan \angle ACE = \frac{\tan \angle ACD - \tan \angle ECI}{1 + \tan \angle ECI \cdot \tan \angle ACD} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{15}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{15}}} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{1+3\sqrt{5}} \text{ となり、} 0^\circ < \angle ACE < 90^\circ \text{ より、} \cos \angle ACE = \frac{1+3\sqrt{5}}{8} \text{ と}$$

$$\text{なり、半角の公式から、} \tan \angle OCJ = \sqrt{\frac{1-\cos \angle ACE}{1+\cos \angle ACE}} = \sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{9+3\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{3} \text{ となり、} CJ = 5 \text{ 寸より、}$$

$$OJ = CJ \cdot \tan \angle OCJ = \frac{5\sqrt{15}-10\sqrt{3}}{3} \text{ 寸といえる。}$$

(2) 設問の図は右のようになる。なお、いくつかの点や直線を付け加えた。

O は AB の中点であり、CD 上の点でもあるので、AO = 5 寸となる。

円 O は AD と接するので、 $OL \perp AD$ で、 $\angle LDO = 30^\circ$ より、 $OL = \frac{1}{2} OD = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ 寸である。

円 P は AD、OD に接するので、PD は $\angle ADO$ を二等分し、 $\angle PDO = \frac{1}{2} \angle ADO = 15^\circ$

よって、 $DH : PH = (\sqrt{3}-1) : (\sqrt{3}+1)$ となり、 $PH = x$ 寸と置くと

で反射していき、最後に点 D に行き着いた場合のその軌跡」-とも言えるでしょう。
次に、この折れ線を真っ直ぐにしていきたいと思います。このやり方はもちろん一意に定まらないですから、ここでは線分 $A\beta_1$ を固定しておきます。さらに、直線 BC を鉛直方向、点 C 側を下向きとします。順に 2 つの手順を踏みます。

① 折れ線を平行な線分の集まりに改めるために、線分 $\beta_k\alpha_k$ ($1\leq k\leq n-1$) と線分 β_nD を、直線 BC に関して対称移動します。このとき、点 α_k の移動先をそれぞれ点 α'_k とおいておきます。ただし、点 D は点 α_n に移るとします。

② ①の操作によって、直線 BC を挟んで 2 つずつ存在してしまっている n 個の点たちを再び一致させるために、線分 $\alpha_k\alpha_{k+1}'$ を鉛直下向きに $2k(\text{cm})$ だけ平行移動します。

以上の操作により、当初の折れ線は、横の辺として AD、半直線 DC 上に長さ $2n(\text{cm})$ の縦の辺をそれぞれ持つ長方形の、点 A を含むほうの対角線へと変貌しました。

そして我々はめでたく回転体について考えることができます。いま面積を求めたいものは、AD を半径とする円を底面に持つ、高さ $2n(\text{cm})$ の円錐の側面だとわかります。したがって、その面積は $\pi\times 1\times\sqrt{1^2+(2n)^2}=\pi\sqrt{4n^2+1}(\text{cm}^2)$ と求まります。

(2)

$60=2^2\times 3\times 5$ より、 $n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+4)=k$ とamp;#x2D;して k が 4、3、5 で割り切れることを確認していく。

まず k が 4 の倍数であることを示す。

$3n^2+3n+4=3n(n+1)+4$ であるため n 、 $n+1$ は連続する整数のためどちらかが偶数のため $3n(n+1)$ は偶数である。4 は偶数のため $3n^2+3n+4$ は偶数であると言える。同様に、 $n(n+1)$ は偶数である。よって n または $n+1$ 、と $3n^2+3n+4$ は偶数であり、 n と $n+1$ と $2n+1$ は整数なので k は 4 の倍数である。…①

次に k が 3 の倍数であることを示す。

(i) n が 3 の倍数であると仮定する。このとき k が 3 の倍数出-ることは自明である。

(ii) n が 3 で割って 1 余る整数であるとする。

このとき $n=3m+1$ (m は整数) と表せるので $2n+1=2\cdot(3m+1)+1=3(2m+1)$ と表せて、 $2m+1$ は整数なので $2n+1$ は 3 の倍数であり、 k も 3 の倍数である。

(iii) n が 3 で割って 2 余る整数であるとする。

このとき $n=3m+2$ (m は整数) と表せるので $n+1=3m+2+1=(m+1)$ と表せて、 $m+1$ は整数なので $n+1$ は 3 の倍数であり、 k も 3 の倍数である。

よって k は 3 の倍数である。…②

最後に k が 5 の倍数であることを示す。

(i) n が 5 の倍数であるとき、 k が 5 の倍数であることは自明である。

(ii) n が 5 で割って 1 余る整数であるとする。

このとき $n=5m+1$ (m は整数) と表せるので

$3n^2+3n+4=3\cdot(5m+1)^2+3\cdot(5m+1)+4=5(15m^2+9m+2)$ と表せて、 $15m^2+9m+2$ は整数なので $3n^2+3n+4$ は 5 の倍数であり、 k も 5 の倍数である。

(iii) n が 5 で割って 2 余る整数であるとする。

このとき $n=5m+2$ (m は整数)と表せるので $2n+1=2\cdot(5m+2)+1=5(2m+1)$ と表せて、 $2m+1$ は整数なので $2n+1$ は 5 の倍数であり、 k も 5 の倍数である。

(iv) n が 5 で割って 3 余る整数であるとする。

このとき $n=5m+3$ (m は整数)と表せるので

$3n^2+3n+4=3\cdot(5m+3)^2+3\cdot(5m+3)+4=5(15m^2+21m+6)$ と表せて、 $15m^2+21m+6$ は整数なので $3n^2+3n+4$ は 5 の倍数であり、 k も 5 の倍数である。

(v) n が 5 で割って 4 余る整数であるとする。

このとき $n=5m+4$ (m は整数)と表せるので $n+1=(5m+4)+1=5(m+1)$ と表せて、 $m+1$ は整数なので $n+1$ は 5 の倍数であり、 k も 5 の倍数である。

よって k は 5 の倍数である。…③

以上①②③より n を自然数とすると $n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+4)$ は 60 の倍数である、

高校数学編

1.

n を正の整数とし、 $S_n = \frac{27n^2 - 39n + 14}{2}$ で定める。このとき全ての n に対して S_n は整数でありかつ、ある連続する自然数の組であってそれらの合計が S_n と等しくなる区間が存在することを示せ。

2.

n 人でじゃんけんをする。勝者の人数の期待値が一番大きくなるのは、

n がいくつの時か。 ($n \geq 2$)

3.

(1) n 次方程式: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ の解を

$x_1, x_2, \dots, x_n$ とおく。

また $x_1, x_2, \dots, x_n$ の d 次の基本対称式を e_d とおく。 ($d=1, 2, \dots, n$)

例えば, $d=1$ のとき $e_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

$d=2$ のとき $e_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \cdots + x_{n-1} x_n$

$d=n$ のとき $e_n = x_1 x_2 \cdots x_n$

このとき $e_d = (-1)^d \frac{a_{n-d}}{a_n}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 実数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ において

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 18$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 2$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \alpha\varepsilon + \beta\gamma + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon = -10$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta\delta} + \frac{1}{\beta\varepsilon} + \frac{1}{\gamma\delta} + \frac{1}{\gamma\varepsilon} + \frac{1}{\delta\varepsilon} = -\frac{10}{9}$$

が成り立つとき $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ の値を求めよ。ただし $\alpha > \beta > \gamma > \delta > \varepsilon$ とする。

4.

(1) $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ のとき、

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

を示せ。

(2) x, y, z, w を正の実数とする。

このとき $\frac{x^4 y^3 z^2 w^1}{x^{10} + y^{10} + z^{10} + w^{10}}$ の最大値を求めよ。

5. 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3}{2} \log n \right)$$

6.

(1) $f(x)$ が下に凸の関数のとき、任意の $x_1, \dots, x_n$ と

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

を満たす任意の $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に対して、

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$$

が成立することを示せ。

(2) 全ての自然数 n に対し、次の不等式が成立することを証明せよ。

$$(n!)^{2n+2} > \left(\frac{1!}{2^1} \cdot \frac{2!}{2^2} \cdots \cdots \frac{n!}{2^n}\right)^2 (n+1)^{n^2-n-2}$$

7.

(1) a を 8 より小さい 0 でない実数とする。

最高次係数が 1 である 4 次関数 $y=f(x)$ は $x=8$ にて x 軸と接し、 $x=0$ 、 $x=a$ で x 軸と交わる。 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれて出来る 2 つの領域のうち、 x 軸より上にある部分を D 、下にある部分を E とすると D と E の面積が等しい。このときの a の値と $f(x)$ を求めよ。

(2) $10^{n-1} \leq N < 10^n$ (n は 2 以上 10 以下の整数) の各位の数字の和を n 乗すると N になる。このような (n, N) の組を全て求めよ。

1.

$S_1=1$ 、 $S_2=22=4+5+6+7$ 、 $S_3=70=7+8+9+10+11+12+13$ より

$(3n-2)$ から $(3n-2)$ 個の連続整数の和と予想できる。

$$\sum_{k=3n-2}^{6n-5} k = \frac{(6n-5+3n-2)(3n-2)}{2}$$

$$= \frac{27n^2-39n+14}{2} = S_n \text{ となり、題意は示された。}$$

2.

① k 人でじゃんけんをした時、勝者が i 人となる確率は、 $\frac{{}_k C_i \cdot 3}{3^k} = \frac{{}_k C_i}{3^{k-1}}$

k 人でじゃんけんをした時の勝者の人数の期待値 E_k は、

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_{i=1}^{k-1} i \cdot \frac{{}_k C_i}{3^{k-1}} = \frac{1}{3^{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} i \cdot {}_k C_i = \frac{1}{3^{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} i \cdot \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1)}{i(i-1) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{3^{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} k \frac{(k-1) \cdots (k-i+1)}{(i-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{1}{3^{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} k \cdot {}_{k-1} C_{i-1} \end{aligned}$$

$$\text{二項定理より } E_k = \frac{k}{3^{k-1}} \{(1+1)^{k-1} - {}_{k-1} C_{k-1}\} = \frac{k(2^{k-1}-1)}{3^{k-1}}$$

② E_k の最大値は、

$$E_{k+1} > E_k \Leftrightarrow \frac{E_{k+1}}{E_k} = \frac{\frac{(k+1)(2^k-1)}{3^k}}{\frac{k(2^{k-1}-1)}{3^{k-1}}} = \frac{(k+1)(2^k-1)}{3k(2^{k-1}-1)} > 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)(2^k-1) > 3k(2^{k-1}-1)$$

$$\Leftrightarrow 2k-1 > 2^{k-1}(k-2)$$

(i) $k=2$ のとき

$5 > 0$ より $\textcircled{1}$ は成り立つ

(ii) $k > 2$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{2k-1}{k-2} > 2^{k-1} \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{k-2} > 2^{k-1}$$

$$2^3 > 2 + \frac{3}{k-2} \text{ より } \textcircled{1} \text{ を満たすためには } k \leq 3 \text{ が必要}$$

$$k=3 \text{ のとき } \textcircled{1} \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{3-2} > 2^{3-1} \text{ となりこれは成立する}$$

$$k=4 \text{ のとき } \frac{E_{k+1}}{E_k} = \frac{(k+1)(2^k-1)}{3k(2^{k-1}-1)} = \frac{(4+1)(2^4-1)}{12(2^{4-1}-1)} = \frac{25}{28} < 1$$

$E_2 < E_3 < E_4 > E_5 \geq E_6 \cdots$ となるので

の人数の期待値が一番大きくなるのは、 $k=4$ のとき。 $(E_4 = \frac{28}{27})$

勝者

3.

(1) 与えられた n 次方程式は、因数定理により

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \text{ と因数分解できる。}$$

x^{n-d} の係数を比較すると

左辺は a_{n-d} 、右辺を展開したときの x^{n-d} の係数は $-x_1, -x_2, \dots, -x_n$ の中から d 個選んで

かけあわせたもの (の a_n 倍) であり、 ${}_nC_d$ 通りである。それらを全て足し合わせると d 次の基本対称式となる。よって $a_n(-1)^d e_d$

したがって、左辺と右辺の x^{n-d} の係数を比較して $a_{n-d} = a_n(-1)^d e_d$

$$e_d \text{ について解くと } e_d = (-1)^d \frac{a_{n-d}}{a_n}$$

(2)

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 18 \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdots \textcircled{3}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \alpha\varepsilon + \beta\gamma + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon = -10 \cdots \textcircled{4}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta\delta} + \frac{1}{\beta\varepsilon} + \frac{1}{\gamma\delta} + \frac{1}{\gamma\varepsilon} + \frac{1}{\delta\varepsilon} = -\frac{10}{9} \cdots \textcircled{5}$$

とする。

$$\textcircled{1} \times \textcircled{3} \text{ より } \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma\delta = 9 \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{1} \times \textcircled{5} \text{ より } \gamma\delta + \beta\delta + \beta\gamma + \beta\gamma\delta + \alpha\delta + \alpha\gamma + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma = -20 \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{2}\textcircled{4}\textcircled{7}\textcircled{6}\textcircled{1}$ の左辺はそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の 1 次、2 次、3 次、4 次、5 次の基本対称式であるので、(1) より $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の値は 5 次方程式 $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 9x - 18 = 0$ の解である。

$f(x) = x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 9x - 18$ とする。

$f(2) = 32 - 32 - 80 + 80 + 18 - 18 = 0$ より $f(x)$ は $(x - 2)$ を因数に持つ。

よって、 $f(x)$ を因数分解すると

$$f(x) = (x - 2)(x^4 - 10x^2 + 9) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$$

よって求める解 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ は $\alpha > \beta > \gamma > \delta > \varepsilon$ より

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -1, \quad \varepsilon = -3$$

4.

(1) $F(x)=e^x \cdot (x+1)$ とすると、 $F'(x)=e^x-1$ となり、 $F(x)$ の最小値は $F(0)=0$ となり、

$$e^x \geq 1+x \cdots \textcircled{1}$$

ここで

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

とおき

$$x = \frac{a_i}{m} - 1$$

を①に代入し、 $i=1$ から n までつくり、辺々を掛け合わせると

$$e^0 = 1 \geq \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^n a_i$$

を得る。したがって

$$m^n \geq \prod_{i=1}^n a_i$$

両辺の n 乗根をとると

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

(2) 与式を変形すると

$$\frac{1}{\frac{x^6}{y^3 z^2 w} + \frac{y^7}{x^4 z^2 w} + \frac{z^8}{x^4 y^3 w} + \frac{w^9}{x^4 y^3 z^2}}$$

$$\text{ここで } X = \frac{x^6}{y^3 z^2 w}, Y = \frac{y^7}{x^4 z^2 w}, Z = \frac{z^8}{x^4 y^3 w}, W = \frac{w^9}{x^4 y^3 z^2}$$

とおくと (1) より

$$\frac{X}{4} + \frac{X}{4} + \frac{X}{4} + \frac{X}{4} + \frac{Y}{3} + \frac{Y}{3} + \frac{Y}{3} + \frac{Z}{2} + \frac{Z}{2} + W \geq 10 \sqrt[10]{\frac{X^4 Y^3 Z^2 W}{4^4 \times 3^3 \times 2^2 \times 1}} = 5 \sqrt[10]{\frac{1}{27}}$$

(等号成立は $X:Y:Z:W=4:3:2:1$ のとき)

$$\text{したがって、求める最大値は } \frac{\sqrt[10]{27}}{5}$$

5.

極限をとる前の計算は次のようになる

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3}{2} \log n = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3n^2}{2} \log n \right)$$

ここで $\frac{3n(n-1)}{2} \log n < \frac{3n^2}{2} \log n < \frac{3n(n+1)}{2} \log n$ であるため、

$$\sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3n(n+1)}{2} \log n < \sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3n^2}{2} \log n < \sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3n(n-1)}{2} \log n$$

となる。…①

$$\begin{cases} \sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3n(n+1)}{2} \log n = \sum_{k=n}^{2n} k \log \frac{k}{n} \\ \sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3n(n-1)}{2} \log n = \sum_{k=n}^{2n} k \log k - \sum_{k=n+1}^{2n-1} k \log n = \sum_{k=n}^{2n} k \log \frac{k}{n} - 2n \log 2n - n \log n \end{cases}$$

であり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3n(n+1)}{2} \log n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=n}^{2n} k \log \frac{k}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{n} \log \frac{k}{n} \end{aligned}$$

$$= \int_1^2 x \log x \, dx \quad (\text{注 1})$$

$$= 2 \log 2 - \frac{3}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3n(n-1)}{2} \log n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=n}^{2n} k \log \frac{k}{n} - 2n \log 2n - n \log n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{n} \log \frac{k}{n} - \frac{2 \log 2 + (2+n) \log n}{n} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{n} \log \frac{k}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log 2 + (2+n) \log n}{n}$$

$$= \int_1^2 x \log x \, dx \quad \left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \quad (\text{注 2}) \right)$$

$$= 2 \log 2 - \frac{3}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

となるため、①②③から、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3}{2} \log n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=n}^{2n} k \log k - \frac{3n^2}{2} \log n \right) = 2 \log 2 - \frac{3}{4}$$

であるといえる。

(注 1) 一般的に学習する区分求積法の形は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

となっていることが多いが、これと同様に図を描けば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_1^2 f(x) dx$$

とも書けることが分かる。(右図参照)

なお左辺は $x=1$ から $x = \frac{2n+1}{n}$ の面積を示しているが、

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{2n+1}{n}\right) = 0$ より、 $x=1$ から $x=2$ までの面積を表しているとしてよい。

また、積の積分法より、

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \log x dx &= \left[\frac{x^2 \log x}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx \\ &= 2 \log 2 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 \\ &= 2 \log 2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(注 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ について

$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ とすると $x > 0$ において

$$f'(x) = e^x - x, f''(x) = e^x - 1 > 0 \text{ より}$$

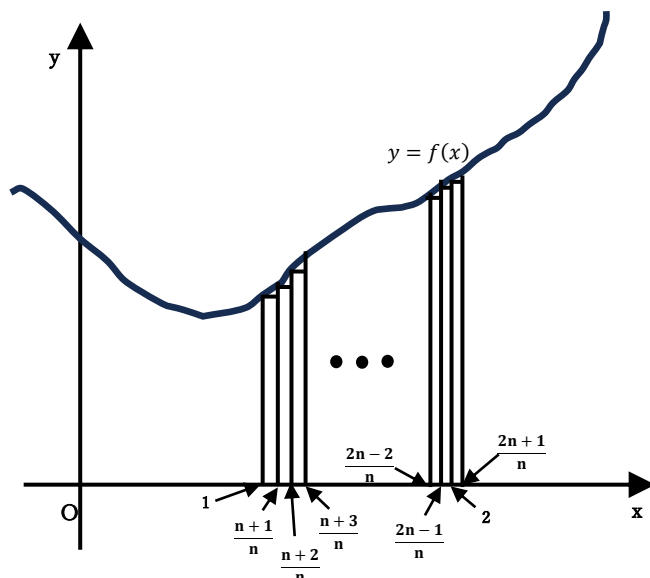
$f'(x)$ は単調増加で、 $f'(0) = 1 > 0$ より、 $f'(x) > 0$ とわかるため

$f(x)$ は単調増加で、 $f(0) = 1 > 0$ より、 $f(x) > 0$ だとわかる。

よって $x > 0$ において $e^x > \frac{x^2}{2}$ つまり $0 < \frac{x}{e^x} < \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x}$ といえる。

よって、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$ より、はさみうちの原理から $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ といえる。

ここで $e^t = x$ とすると $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0$ となり $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ である



6.

(1)問題文で示した不等式はジェンゼンの不等式と呼ばれるものである

が、

関数の凸性を考えれば当然ではある

～ジェンゼンの不等式の証明（数学的帰納法）～

(i) $n=2$ のとき示す不等式は次の凸の関数の性質（性質 1 とする）

「任意の $x_1, x_2, \lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ に対して

$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ を満たす」と同値。

(ii) $n=k$ のときジェンゼンの不等式の成立を仮定すると、

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\geq \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot f\left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^k \lambda_i}\right) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \left(\because \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} = 1\right) \\ &\geq f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) \left(\because \sum_{i=1}^k \lambda_i + \lambda_{k+1} = 1, \text{性質 1}\right)\end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ のときも成立する。

以上 (i) (ii) より、ジェンゼンの不等式は示された。■

(2) $f(x) = \log x^x$ とすると、 $f''(x) = \frac{1}{x} > 0 (\because x > 0)$ となり、(注 1)

$y = f(x)$ は下に凸の関数であるといえる。

ここで(1)で示した「ジェンゼンの不等式」を

$x_i = i, \lambda_i = \frac{1}{n+1}, n = n+1, f(x) = \log x^x$ とすると ジェンゼンの不等式は

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\log i^i}{n+1} \geq \log \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{n+1} \right)$$

となり、これを整理すると、

$$\frac{1}{n+1} \{ \log 1^1 + \log 2^2 + \cdots + \log(n+1)^{(n+1)} \} \geq \log \left(\frac{n+2}{2} \right)^{\frac{n+2}{2}} \dots \textcircled{1}$$

と なる。 一方、

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \{ \log 1^1 + \log 2^2 + \cdots + \log(n+1)^{n+1} \} > \frac{1}{n+1} \{ \log 1^1 + \log 2^2 + \cdots + \log(n+1)^{n+1} \} \\ \log \left(\frac{n+2}{2} \right)^{\frac{n+2}{2}} > \log \left(\frac{n+1}{2} \right)^{\frac{n+1}{2}} \end{cases}$$

であるため、($\because x > 0$)

$$\frac{1}{n} \{ \log 1^1 + \log 2^2 + \cdots + \log(n+1)^{n+1} \} > \log \left(\frac{n+1}{2} \right)^{\frac{n+1}{2}}$$

といえる。よって、

$$\frac{1}{n} \{ \log 1^1 + \log 2^2 + \cdots + \log(n+1)^{n+1} \} > \log \left(\frac{n+1}{2} \right)^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \log\{1^1 \cdot 2^2 \cdots (n+1)^{n+1}\}^2 > \log\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n(n+1)} \\
&\Leftrightarrow \{1^1 \cdot 2^2 \cdots (n+1)^{n+1}\}^2 > \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n(n+1)} \quad (\because y = \log x \text{ は単調増加関数}) \\
&\Leftrightarrow \frac{\{(n+1)!\}^{2n+2}}{(1! \cdot 2! \cdots n!)^2} > \frac{(n+1)^{n(n+1)}}{2^{n(n+1)}} \quad (\text{注 2}) \\
&\Leftrightarrow \frac{\{(n+1)!\}^{2n+2}}{(n+1)^{n(n+1)}} > \frac{(1! \cdot 2! \cdots n!)^2}{2^{n(n+1)}} \\
&\quad \Leftrightarrow \frac{(n!)^{2n+2}}{(n+1)^{n^2-n-2}} > \frac{(1! \cdot 2! \cdots n!)^2}{2^{n(n+1)}} \\
&\Leftrightarrow (n!)^{2n+2} > \left(\frac{1!}{2^1} \cdot \frac{2!}{2^2} \cdots \frac{n!}{2^n}\right)^2 (n+1)^{n^2-n-2}
\end{aligned}$$

となり、題意は示された。■

解答は上記のようになるが、問題を解く過程は解答の逆をたどることになる。

(注 1) $f(x) = \log x^x = x \log x$ とすると、 $f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$ となり、
 $f''(x) = \frac{1}{x}$ となる。

(注 2) $1^1 \cdot 2^2 \cdots (n+1)^{n+1} = \frac{\{(n+1)!\}^{n+1}}{1! \cdot 2! \cdots n!} \cdots \textcircled{2}$ について

右表 1 の縦横 $n+1$ ずつある数表 A を考える。

数表 A の m 行目 n 列目の数字を (m,n) と表す。

②の右辺の分子は数表 A の数を全て掛けた値となる。

また、右辺の分母の式は表 2 において数表 A に
引いた線の左下の側の数を全てかけた値になる。

よって、②の右辺は表 2 において数表 A に
引かれた線の右上の部分にある数を全て
け合わせた値を示すことになる。

一方、左辺の値は表 2 において数表 A に
引いた線の左下の側の数を全てかけた値になる。
よって②は示された。■

1	2	3	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$n-1$	n	$n+1$
1	2	3	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$n-1$	n	$n+1$
1	2	3	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$n-1$	n	$n+1$
1	2	3	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$n-1$	n	$n+1$
1	2	3	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$n-1$	n	$n+1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	2	3	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$n-1$	n	$n+1$
1	2	3	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$n-1$	n	$n+1$
1	2	3	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$n-1$	n	$n+1$
表 1										
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	2	3	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$n-1$	n	$n+1$
1	2	3	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$n-1$	n	$n+1$
1	2	3	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$n-1$	n	$n+1$
表 2										

(1)

条件より、 $f(x)=x(x-a)(x-8)^2$ となる。

(i) $0<a<8$ のとき、

$\int_0^8 f(x)dx=0$ を満たすものを求める。 $f_{(x)}=(x-8+8)(x-8+8-a)(x-8)^2$ より

$$\int_0^8 f(x)dx = \left[\frac{\{(x-8)^5\}}{5} + \frac{\{(16-a)(x-8)^4\}}{4} + \frac{\{8(8-a)(x-8)^3\}}{3} \right]_0^8$$

$\int_0^8 f(x)dx=0$ から a を求めると $a=\frac{16}{5}$

また、このとき、 $f(x) = x\left(x - \frac{16}{5}\right)(x-8)^2$

(ii) $a<0$ のとき

$\int_a^8 f(x)dx=0$ から a を求めると $a=-\frac{16}{3}$ このとき、 $f(x) = x\left(x + \frac{16}{3}\right)(x-8)^2$

(2)

n を固定して全部試すと $(n, N)=(2, 81)$ 、 $(3, 512)$ 、 $(4, 2401)$

おわりに

読んでいただき、ありがとうございました。いかがでしたか。本誌に掲載されたすべてを理解することは難しかったかもしれません。が、本誌を読むことで、少しでも数学の美しさ、おもしろさや奥深さが感じられたら幸いです。

入部した当時。私にとって数学はとてもきれいで楽しいものでした。考え、理解し、問題を解いていくのがとても楽しかったのを覚えています。今はそれに加えて、施行を表現し、人に伝え、交流することが同じくらい楽しく充実したものだということを知ることができます。数学研究会の活動があったから味わえたものだと思います。

私たち3年生(77回生)は文化祭が終わればほどなく数学研究会を引退し、後輩の皆さんにバトンを渡すこととなります。今後の彼らのますますの活躍を願っています。これからも数学研究会の応援をよろしくお願いいたします。ありがとうございました。

数学研究会リーダー 岡野和子

数学研究会紹介

数学研究会委員 令和 6 年(2024 年) 4 月 1 日現在

3 年 リーダー 岡野和子
副リーダー 番場大誠

3 年メンバー

西崎俊介 内田龍之介 神崎亮志 平松拓海 古川仁翔
前場雄晴 宮下透 柳澤昭宏 山本大智 吉岡稜太郎

2 年メンバー

国田廉太郎 成松海翔 富田実人 遠藤誠仁 宮本朝陽 神村梓紗 川野駈
浅田恵人揚 浅田結衣 石川敦久 上森美波 大河原陽彩 大谷凌右 大地花菜
尾川せり 小川空輝 金光幹太 河南聡一郎 川西凜子 岸本慧吾 杉江春彦
清家心実 田中静将 辻井禮 永見一悟 早川翔 廣岡夢菜 藤田瑞希
松田佳央理 間之川賢人 三宅克典 吉田瑞

毎週水曜日 放課後 1-9, 2-9, 3-9 で活動しています。見学などは活動中ならばいつでも大歓迎です。

数研のサイト <http://seika.ssh.kobe-hs.org/cat/60/ita/12>

(学校のホームページの一部です。資料を利用される際は、カテゴリ表示に記載されているルールに基づいて利用をお願い致します。)

この「SSH KOBE.H.S. MATH JOURNAL」の発行に際して、助力いただいた先生方、査読をしてくださった方、本当にありがとうございました。

令和 6(2024)年 5 月 1 日 発行 編集・制作 兵庫県立神戸高等学校 数学研究会